Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Fragebogen 17 vom 15. 1.

---

1. Betrachte die folgenden beiden Sätze.

$$\varphi_1: \quad \exists X \Big(\mathsf{Einer}(X) \;\wedge\; \neg\exists Y \big(\mathsf{succ}(X) = Y\big) \;\wedge\; X \subseteq P_1 \Big)$$
$$\varphi_2: \quad \exists x \Big(\mathsf{Einer}(x) \;\wedge\; \neg\exists y \big(\mathsf{succ}(x) = y\big) \;\wedge\; P_1(x) \Big)$$

Einer dieser Sätze ist in Normalform, der andere nicht.

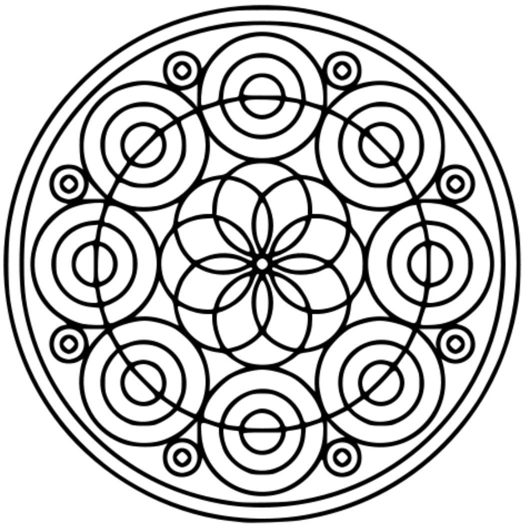
a) Welcher ist in Normalform? ◯ φ_1 ◯ φ_2

b) Welche Sprache definiert er?

$L(\varphi_{\_}) =$ ____

2. In der Übersetzung von S1S-Formeln in NEAs werden für die Operatoren $\neg, \wedge, \exists$ welche Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen verwendet? Ordne zu, indem Du drei Verbindungslinien einzeichnest.[1]

	Vereinigung
$\neg$	Schnitt
	Komplement
$\wedge$	
	Konkatenation
$\exists$	Kleene-Stern
	Projektion



3. Gib einen regulären Ausdruck an, der bezeugt, dass die Sprache (10^*) sternfrei ist (denke auch hier an verbotene Infixe und mehr).

____

Bitte wenden.

[1] Mit anderen Worten: erzeuge einen bipartiten Graphen mit den gegebenen Knoten und 3 Kanten. ;–)

Kurze Wiederholung S1S

Signatur: $0, s, <, P_1, P_2, P_3, \dots$ plus unäre Rel.-variablen X, Y, …

S1S-Struktur z. B.:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xrightarrow{s} & 1 & \xrightarrow{s} & 2 & \xrightarrow{s} & 3 & \xrightarrow{s} & 4 \circlearrowleft s \\
P_1 & & P_1 & & & & P_2 & & P_1 \\
 & & P_2 & & & & & & P_2
\end{array}
$$

entspricht Wort $\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{1}$ über Alphabet $\Sigma_2 = \{0,1\}^2$

S1S-Satz φ mit Symbolen $P_1, \dots, P_n$ **definiert Sprache**
$L(\varphi) = \{w \in \Sigma_n^* \mid w \models \varphi\}$ über dem Alphabet $\Sigma_n = \{0,1\}^n$

Theorem 4.11 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist regulär
2. $L = L(\varphi)$ für einen S1S-Satz φ

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Vorbereitungen zum Beweis von „2 ⇒ 1“.

Zunächst bringen wir den S1S-Satz in eine geeignete Normalform:

- FO-Variablen werden nicht verwendet
- atomare Formeln haben die Form
  - $X \subseteq Y$, mit Semantik $\forall x\,(\,X(x) \to Y(x)\,)$
  - $\mathsf{succ}(X) = Y$, mit Semantik „X und Y sind Einermengen $\{k\}$ und $\{\ell\}$ mit $\ell = k + 1$“

  wobei X und Y Relationsvariablen oder Relationssymbole sind
- (die Symbole 0, $<$, s werden also nicht verwendet)

T4.10

Lemma 4.12
Jeder S1S-Satz kann effektiv in einen äquivalenten Satz in Normalform gewandelt werden.

T4.11

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Theorem 4.11 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist regulär
2. $L = L(\varphi)$ für einen S1S-Satz φ

Beweis von „2 ⇒ 1“.

Induktive Übersetzung von S1S-Formeln in Normalform
in „äquivalenten“ endlichen Automaten (NEA)

Die strukturelle Induktion erfordert es,
auch Formeln mit freien Variablen zu betrachten.

Diese werden wie die unären Relationssymbole $P_1, P_2, \dots$ behandelt,

z.B. liefert $\exists Y\,(\,X \subseteq Y \land P_1 \subseteq Y\,)$ Sprache über $\Sigma_2 = \{0,1\}^2$

T4.12 T4.13

FO und formale Sprachen

Da MSO-Definierbarkeit genau den regulären Sprachen entspricht,
ist eine **natürliche Frage:**

Sei F1S die Einschränkung von S1S auf FO.
Welche Sprachklasse entspricht den F1S-definierbaren Sprachen?

Definition 4.13 (sternfreie Sprachen)
Die Klasse der *sternfreien Sprachen* über einem Alphabet Σ
ist die kleinste Klasse, so dass:

- $\emptyset$ und $\{a\}$ sind sternfreie Sprachen für alle $a \in \Sigma$.
- wenn L und L' sternfreie Sprachen sind, dann auch
  $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$, $L \cap L'$, $L \cup L'$ und $L \cdot L' = \{ww' \mid w \in L,\, w' \in L'\}$.

Beachte: Im Unterschied zu den regulären Sprachen steht der
Kleene-Stern nicht zur Verfügung, dafür aber Komplement.

T4.14