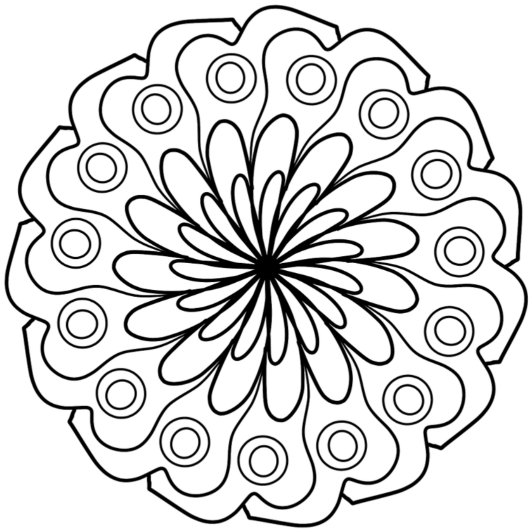
Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Fragebogen 12 vom 10. 12.



1. Was bedeutet $\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$?

- ☐ $\Gamma \models \bigwedge \Pi \to \bigvee \Delta$
- ☐ Jedes Modell von Γ, das alle Formeln in Π wahr macht, muss alle Formeln in Δ wahr machen.
- ☐ Jedes Modell von Γ, das alle Formeln in Π wahr macht, muss mindestens eine Formel in Δ wahr machen.

2. Zeige, dass Teil 1 des Kompaktheitssatzes (Thm. 3.10) aus Teil 2 folgt. Vervollständige dazu den folgenden Beweis.

Γ ist erfüllbar

gdw. $\Gamma \not\models$ _______________

gdw. für alle endlichen $\Gamma_\mathsf{f} \subseteq \Gamma$ gilt: __________________________ (Teil 2)

gdw. für alle endlichen $\Gamma_\mathsf{f} \subseteq \Gamma$ gilt: Γ_f erfüllbar

3. Welche der folgenden Eigenschaften sind in FO **nicht** ausdrückbar?

- ☐ Modellgröße $\geq n$
- ☐ Modellgröße $< n$
- ☐ Modellgröße endlich
- ☐ Modellgröße unendlich
- ☐ Modellgröße abzählbar unendlich
- ☐ Modellgröße überabzählbar unendlich
- ☐ Zusammenhang von ungerichteten Graphen

4. a) Was ist eine Eigenschaft?

◯ eine FO-Formel ◯ eine Struktur ◯ eine Menge von Strukturen

b) Was bedeutet „eine Menge P von Strukturen ist unter Isomorphie abgeschlossen“?

◯ Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in P$ gilt: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph.

◯ Für alle $\mathfrak{A} \in P$ und $\mathfrak{B}$ isomorph zu $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{B} \in P$.

c) Eine Eigenschaft P ist ausdrückbar, wenn es einen FO-Satz φ gibt, der …

◯ … von allen Strukturen $\mathfrak{A} \in P$ erfüllt wird.

◯ … von allen Strukturen $\mathfrak{A} \in P$ erfüllt wird und von allen anderen nicht.

Bitte wenden.

Erweiterter Sequenzenkalkül

Beweis von Kompaktheit erfordert Variation des Sequenzenkalküls:

Anstatt für die Gültigkeit von Sequenzen $\models \Pi \Rightarrow \Delta$
interessiert man sich nun für die Folgerbarkeit von Sequenzen
aus einer (eventuell unendlichen) Formelmenge Γ:

$\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$ steht für $\Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$

Für eine Menge von Sätzen $\Gamma \subseteq$ FO erhält man die Γ-*Erweiterung*
des SK durch Hinzufügen der Regel

$$(\Gamma\text{-Regel}) \quad \frac{\Pi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Pi \Rightarrow \Delta} \quad \varphi \in \Gamma$$

Theorem 3.11 (Korrektheit+Vollständigkeit erweiterter SK)

$\Pi \Rightarrow \Delta$ in der Γ-Erweiterung des SK ableitbar gdw. $\Gamma \models \Pi \Rightarrow \Delta$

Beweis des Kompaktheitsatzes

Theorem 3.10 (Kompaktheitssatz)

Für alle Mengen von Sätzen $\Gamma \subseteq$ FO und Sätze $\varphi \in$ FO gilt:

1. Γ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
2. $\Gamma \models \varphi$ gdw. endliches $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ existiert mit $\Gamma_f \models \varphi$.

Beweis mittels Γ-Erweiterung des Sequenzenkalküls,
in der also wegen des vorigen Lemmas gilt:

Es gibt SK-Beweis für $\Pi \Rightarrow \Delta$ gdw. $\Gamma \models \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Delta$

T3.6

Beachte:

Es wird hier eine syntaktische Eigenschaft (Kalkül)
in eine rein semantische (Erfüllbarkeit, Konsequenz) übertragen.

Unendliche Modelle

Theorem 3.12 (unbeschränkte endliche Modelle)

Wenn ein FO-Satz φ beliebig große endliche Modelle besitzt
(d. h. für jedes $n \geq 0$ gibt es Modell $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geq n$),
dann hat φ auch ein unendliches Modell.

T3.7

Dieses Thm. impliziert eine **Beschränkung der Ausdrucksstärke** von FO:

Es gibt keinen FO-Satz φ, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $|A|$ endlich.
Das heißt: Endlichkeit ist *nicht* FO-ausdrückbar.

Für ein festes n ist „Modellgröße $\leq n$“ aber natürlich leicht ausdrückbar:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{0 \leq i < j \leq n} x_i = x_j \right)$$

Nicht-Ausdrückbarkeit über Kompaktheit

Zur Erinnerung:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *zusammenhängend,*
wenn es für alle Knoten $v, v' \in V$ eine Knotenfolge $v_1, \dots, v_n$ gibt,
so dass $v = v_1,\ v_n = v'$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < n$

Ungerichtete Graphen sind nichts anderes als $\{E\}$-Strukturen,
E binäres Relationssymbol, das symmetrisch interpretiert wird.

Wir beweisen die Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang
mittels Kompaktheit.

Theorem 3.16

Zusammenhang von ungerichteten Graphen ist nicht FO-ausdrückbar.

T3.8