Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Übungsblatt 4

Abgabe bis **Do., 6. 12., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 4“, als PDF. Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (25 %) Wir betrachten ein Datenbankschema mit den Relationen Film, Schauspieler_in und Programm. Dabei hat Film die Attribute (Titel, Jahr, Regisseur_in), Schauspieler_in die Attribute (Titel, Name) und Programm die Attribute (Titel, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstanz für dieses Schema ist:

Film

Titel	Jahr	Regisseur_in
Mockingjay 2	2015	Francis Lawrence
...		

Schauspieler_in

Titel	Name
Mockingjay 2	Jennifer Lawrence
Mockingjay 2	Josh Hutcherson
...	

Programm

Titel	Kino	Uhrzeit
Mockingjay 2	Cinemaxx	19:50
Mockingjay 2	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

a) Regisseur_innen, die auch Schauspieler_innen sind

b) Schauspieler_innen, die in irgendeinem Film mitgespielt und Regie geführt haben

c) Filme, die im selben Kino zu mindestens zwei verschiedenen Uhrzeiten gezeigt werden

d) Filme, in denen nur ein_e einzige_r Schauspieler_in mitspielt

e) Paare (r, z) von Regisseur_innen und Uhrzeiten, zu denen ein Film dieser/s Regisseurin/s gezeigt wird

f) Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es ein Kino gibt, das Filme unterschiedlicher Regisseur_innen zeigt.

2. (25 %) Seien φ, ψ beliebige FO-Formeln. Zeige oder widerlege:

a) $\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi \;\models\; \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

b) $\forall x\, (\varphi \vee \psi) \;\models\; \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$

c) $\varphi \wedge \exists x\, \psi \;\equiv\; \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$

d) Der Satz $\forall x\, \exists y\, \big(f(y) = x\big)$ ist gültig.

3. (25 %) Bringe die folgenden Formeln mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in Pränex-Normalform:

a) $\forall y\, \Big(R(x, y) \to P(y) \vee \neg\exists x\, \big(S(y, x) \wedge Q(x)\big)\Big)$

b) $\forall x\, \Big(P(x, y) \wedge \forall x\, Q(x, x) \wedge \neg\forall y\, Q(x, y)\Big)$

Bitte wenden.

4. (25 %) In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass zentrale SQL-Entscheidungsprobleme bekannten FO-Entscheidungsproblemen entsprechen. Beispielsweise entspricht das Problem

Gegeben:	Datenbankinstanz $\mathfrak{A}$, SQL-Anfrage $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$
Frage:	Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Antwort auf φ bezüglich $\mathfrak{A}$?

genau dem Auswertungsproblem für FO-Formeln:

Gegeben:	$\mathfrak{A}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, β mit $\beta(x_i) = a_i$ für alle $i \leq n$
Frage:	Gilt $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$?

a) Gib für die SQL-Probleme 1–3 von Folie 63 die entsprechenden Formulierungen als Erfüllbarkeits-, Folgerbarkeits- bzw. Äquivalenzproblem für FO an.

b) Erläutere für Problem 3, wie man dessen Unentscheidbarkeit aus dem Satz von Trakhtenbrot (Theorem 2.26) folgern kann.

5. Zusatzaufgabe (20 %)

Beweise, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe entscheidbar ist, wenn man nur unäre Relationssymbole und keine Funktionssymbole zulässt. Nimm der Einfachheit halber an, dass Gleichheit ebenfalls nicht zugelassen ist.

Hinweis: Beobachte, dass man mit unären Relationssymbolen lediglich einzelne Elemente einer Struktur markieren kann und dass Elemente mit gleicher „Markierung“ ununterscheidbar sind. Gehe dann so vor:

a) Bestimme die Anzahl m möglicher „Markierungen“, wenn eine Struktur n verschiedene unäre Relationssymbole interpretiert.

b) Zeige, dass jeder erfüllbare Satz, in dem n verschiedene unäre Relationssymbole vorkommen, ein Modell mit einem Universum der Größe höchstens m hat (starte dazu mit einem beliebigen Modell und stelle daraus ein Modell her, in dem jede „Markierung“ höchstens einmal vorkommt).

c) Argumentiere dann mit Hilfe eines Aufzählarguments, dass aus der Existenz dieser Modelle wie gewünscht Entscheidbarkeit folgt.