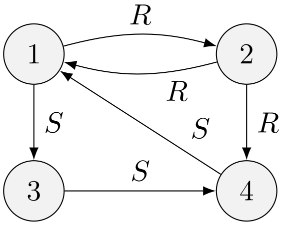
Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Übungsblatt 3

Abgabe bis **Do., 22. 11., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 3“, als PDF. Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

1. (28 %) Gegeben ist die folgende Struktur $\mathfrak{A}$, wobei R und S binäre Relationssymbole sind.



a) (16 %) Gib für jeden der folgenden Sätze φ_i an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$, und begründe kurz.

(i) $\varphi_1 = \forall x \exists y \Big(R(x,y) \lor S(x,y) \Big)$

(ii) $\varphi_2 = \exists y \forall x \Big(R(x,y) \lor S(x,y) \Big)$

(iii) $\varphi_3 = \exists x \exists y \exists z \exists u \Big(R(x,y) \land R(y,z) \land R(z,u) \land R(u,x) \Big)$

(iv) $\varphi_4 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big(R(x,y) \land R(y,z) \big) \to x = z \Big)$

b) (12 %) Gib je eine Formel $\varphi(x)$ an, so dass das Folgende gilt, und begründe kurz.

(i) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{1, 2\}$

(ii) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{2, 3\}$

2. (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ aus der Vorlesung. Gib FO-Sätze an, die die folgenden Aussagen beschreiben:

a) Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt: es gibt eine Primzahl zwischen n und $2n$ (Satz von Bertrand).

b) Jede ungerade Zahl größer als 1 ist Summe von fünf oder weniger Primzahlen (Satz von T. Tao).

c) Es gibt beliebig große Abstände zwischen aufeinander folgenden Primzahlen. (Nebenbemerkung: dieser Satz trägt keinen gesonderten Namen, denn er ist leicht zu beweisen: beobachte, dass für jedes n die Folge $n! + 2,\ n! + 3,\ \ldots,\ n! + n$ keine Primzahl enthalten kann.)

Die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen $\mathsf{Prim}(x)$ und $x > y$ dürfen verwendet werden. Zusätzlich verwendete Abkürzungen müssen definiert werden.

3. (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{A}$ aus Aufgabe 1. Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists x\, R(x,y)$ mit $\beta_1(y) = 1$

b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall y\, (R(x,y) \lor S(x,y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

Bitte wenden.

4. (24 %) Das *Spektrum* eines FO-Satzes φ, geschrieben $\mathsf{Spek}(\varphi)$, ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, so dass φ ein Modell mit einem Universum der Größe n besitzt. Beispielsweise gilt $\mathsf{Spek}\big(\forall x\,(x = x)\big) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

   a) (18 %) Bestimme das Spektrum folgender Sätze. Begründe jeweils kurz.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \exists x\,\forall y\,(x = y)\\ \varphi_2 &= \exists x\,P(x) \wedge \exists x\,\neg P(x)\\ \varphi_3 &= \exists x\,P(x) \wedge \forall x\,\neg P(x)\\ \varphi_4 &= \neg\varphi_2\end{aligned}$$

   b) (6 %) Zeige, dass für alle FO-Sätze φ, ψ gilt: wenn $\varphi \equiv \psi$, dann $\mathsf{Spek}(\varphi) = \mathsf{Spek}(\psi)$.

   Ohne Wertung: Gilt die Umkehrung dieser Implikation? Begründe.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) *Kőnigs Unendlichkeitslemma* ist ein wichtiger Satz aus der Graphentheorie, der auch in der Berechenbarkeitstheorie verwendet wird. Man kann ihn bequem mittels des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik beweisen.

   Ein *Baum* hat die Form $B = (V, w, <)$. Dabei ist V die (endliche oder unendliche) Knotenmenge, $w \in V$ die *Wurzel* von B und $< \subseteq V \times V$ die Nachfolgerrelation. Ein *Pfad* in B ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Knoten $v_0, v_1, \dots$, so dass $v_0 = w$ und $v_i < v_{i+1}$ für alle $i \geq 0$. Für jeden Knoten $v \in V$ muss es in B genau einen Pfad von w nach v geben.

   Kőnigs Unendlichkeitslemma. Sei $B = (V, w, <)$ ein Baum mit unendlich vielen Knoten, in dem jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, d. h. $\{v' \in V \mid v < v'\}$ ist eine endliche Menge für jedes $v \in V$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad in B.

   Beweise Kőnigs Unendlichkeitslemma mithilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik. Verwende dabei eine unendliche Formelmenge Γ der folgenden Art:

   - Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es eine Variable x_v.
   - Sei $V_i = \{v \in V \mid w <^i v\}$ die Menge aller Knoten in B mit Abstand i zur Wurzel. Du darfst die (leicht zu zeigende) Aussage verwenden, dass V_i endlich und nicht leer ist für jedes $i \geq 0$.
   - Wähle Γ derart, dass jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist und dass Γ genau dann erfüllbar ist, wenn B einen unendlichen Pfad besitzt. Begründe diese beiden Eigenschaften.

Tool-Empfehlung: Als Vorbereitung auf Aufgaben 1 und 2 könnt Ihr die „Quizfragen – Prädikatenlogik“ (Syntax, Semantik) im Dortmunder Logik-Tool

`http://gaga.cs.tu-dortmund.de:8080/LogicWeb-Tutorials/#`

lösen. Wenn dort von einer „geschlossenen Formel“ die Rede ist, dann ist ein Satz gemeint.

Auch diese Empfehlung ist wieder ohne Gewähr. Feedback und Verbesserungsvorschläge gern per E-Mail an mich und/oder `thomas.zeume@tu-dortmund.de`.