Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2018/19

Logik

Übungsblatt 1

Abgabe bis **Do., 25. 10., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 1“, als PDF. Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (40 %) Die Kinder Anna, Bert, Chris, David und Eva spielen „Ritter und Knappe“. Die Spielregeln sind einfach: jedes Kind ist das ganze Spiel über entweder Ritter oder Knappe. Ritter sagen immer die Wahrheit; Knappen lügen immer. Gegeben sind die folgenden Aussagen:

1. Eva sagt: „Unter Anna, Chris und David befindet sich mindestens ein Knappe.“
2. Anna sagt: „Bert ist nur dann Knappe, wenn David Ritter ist.“
3. Bert sagt: „Wenn Chris Ritter ist, dann ist entweder Anna oder David Knappe.“
4. Chris sagt: „Eva ist Knappe, und auch Anna oder Bert sind Knappe.“
5. David sagt: „Wenn Bert Ritter ist, dann auch Anna oder Chris.“
6. Drei der Kinder sind Ritter, die anderen zwei sind Knappen.

Die Frage ist, welche drei Kinder die Ritter sind. Löse das Rätsel mittels Aussagenlogik:

a) Gib aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel). Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind ein Ritter ist, also z. B. eine Variable x_a für die Aussage „Anna ist ein Ritter“.

Hinweis: Die Aussage „Anna sagt, dass Bert ein Knappe ist“ kann dann z. B. durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden: $(x_a \rightarrow \neg x_b) \wedge (\neg x_a \rightarrow x_b)$

b) Wie viele erfüllende Belegungen hat die Formel φ_6? Gib alle an!

c) Gib eine Belegung V an, die alle Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ erfüllt! In welcher Beziehung steht V zur Lösung des Rätsels?

d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln erfüllen? Begründe. Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

2. (ohne Wertung) Wir betrachten das Auswertungsproblem der Aussagenlogik.

a) Gib einen möglichst effizienten Algorithmus (in Pseudocode) zum Auswerten von aussagenlogischen Formeln an. Orientiere Dich an den Hinweisen aus der Vorlesung und/oder den Materialien zu Theoretische Informatik 2 (Stud.IP).

b) Dokumentiere die Arbeitsweise Deines Algorithmus anhand der Formel $\varphi = \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \vee x_3)$ und der Belegung V mit $V(x_1) = 0$, $V(x_2) = 1$ und $V(x_3) = 1$.

c) Argumentiere, dass der Algorithmus (auf jeder Eingabe) in Polynomialzeit läuft!

Bitte wenden.

3. (30 %) Zeige durch Anwenden der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass auch die folgenden Äquivalenzen gelten. Gehe vor wie im Beispiel auf Folie 21; gib für jeden Schritt die angewandte Regel an.

a) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv y$

b) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \equiv (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

c) $0 \wedge x \equiv 0$ und $1 \vee x \equiv 1$

4. (30 %) Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion f mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 1 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gib eine aussagenlogische Formel für f in disjunktiver Normalform an.

b) Sei $M = \{f, 0, 1\}$. Zeige, dass M funktional vollständig ist.

c) Zeige für jede echte Teilmenge $M' \subsetneq M$, dass M' nicht funktional vollständig ist.

5. Zusatzaufgabe (20 %) Betrachte die induktive Definition der Menge $\mathsf{TF}(\varphi)$ aller Teilformeln von φ aus der Vorlesung.

a) Gib eine entsprechende induktive Definition für die Länge $\ell(\varphi)$ von φ an. Dabei sollen atomare Formeln, Junktoren und Klammern jeweils die Länge 1 haben. So soll z. B. die Formel $\varphi = (\neg x \wedge y)$ die Länge $\ell(\varphi) = 6$ haben.

b) Beweise per Induktion über die Struktur der Formel φ:

Für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt $|\mathsf{TF}(\varphi)| \leq \ell(\varphi)$.

Zeige dazu zunächst, dass die Aussage für alle atomaren Formeln gilt (dies ist der Induktionsanfang). Zeige dann: wenn die Aussage für zwei beliebige Formeln φ und ψ gilt, dann gilt sie auch für $\neg\varphi$, für $\varphi \wedge \psi$ und für $\varphi \vee \psi$ (dies ist der Induktionsschritt; er zerfällt also in drei Fälle).

Tool-Empfehlung: An der Universität Dortmund wird ein webbasiertes Tool zum Üben von Logik entwickelt. Ihr könnt das Tool verwenden, um Euch auf einige der Aufgaben der Übungsblätter vorzubereiten. Dort könnt Ihr ähnliche Aufgaben lösen und Rückmeldung zu Euren Lösungen bekommen. Diese Empfehlung ist ohne Gewähr, denn das Tool ist noch nicht völlig ausgereift und die verwendete Notation weicht manchmal von unserer ab. Es gibt 2 Versionen:

2018/19 `https://garlic.cs.tu-dortmund.de/showcase/?locale=de`
2017/18 `http://gaga.cs.tu-dortmund.de:8080/LogicWeb-Tutorials/#`

Bitte lest vor dem Benutzen die Hinweise in Version 2017/18 durch. Das Team freut sich außerdem über konstruktives Feedback und Verbesserungsvorschläge – in diesem Fall bitte E-Mail an mich und/oder `thomas.zeume@tu-dortmund.de`.
Für dieses Blatt empfehle ich:

- für Aufgabe 1: Version 2017/18, Aufgaben „Präsenzübung 0“ und „Aussagenlogische Modellierung und Schlussfolgerung“; Version 2018/19, erste 3 „Einzelaufgaben“
- für Aufgabe 3: Version 2017/18, Aufgaben „Äquivalenz“ im Block „Tutorial – Äquivalenzen und Normalformen“

LaTeX-Tipp: Wenn Ihr ein bestimmtes Symbol sucht, dann schaut in `symbols-a4.pdf` nach – in Eurer LaTeX-Installation enthalten oder online: `https://tinyurl.com/y94to4wl`.
Die Webapp `Detexify` erspart das Durchblättern der PDF-Datei: `https://tinyurl.com/ms49zw`