Logik

WiSe 2018/19

Thomas Schneider

Teil 2: Prädikatenlogik Grundlagen

Homepage der Vorlesung: `http://tinyurl.com/ws1819-logik`

Prädikatenlogik

Für viele Zwecke in der Informatik und Mathematik abstrahiert die Aussagenlogik zu stark.

Betrachte z. B. die Beispiele aus der Einleitung:

Alle Menschen sind sterblich Sokrates ist ein Mensch	Jedes P ist auch ein Q x ist ein P
Sokrates ist sterblich	x ist ein Q

- $\forall n \in \mathbb{N} : \exists n' \in \mathbb{N} : n' = \mathsf{nf}(n)$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \mathsf{nf}(n) \neq 0$
- $\cdots$

Bei diesen Aussagen geht es nicht nur um Wahrheitswerte:
Objekte (Menschen, natürliche Zahlen) und Quantifizierung sind zentral!

Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik wurde von Frege gegen Ende des 19. Jh. eingeführt.

Zentrale Elemente

1. Formeln zusammengesetzt aus Objektvariablen, Booleschen Operatoren und Quantoren
2. eine Semantik, die Objekte sowie deren Eigenschaften und Beziehungen erfasst

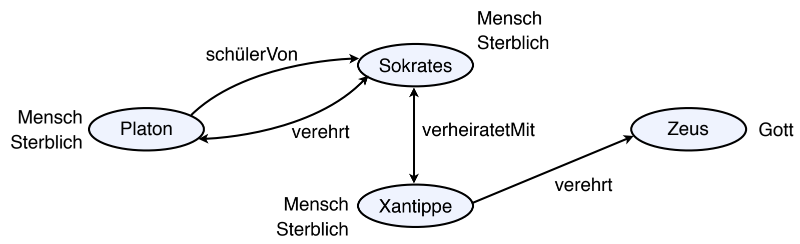
Prädikatenlogik spielt zentrale Rolle in Informatik, Mathematik, Philosophie

Andere Namen: Logik erster Stufe, First-order Logic, Predicate calculus

Abkürzung: FO

Vorschau 1

Eine semantische Struktur der Logik erster Stufe:



Zu dieser Struktur passende Beispielformeln:

$$\forall x\,(\mathsf{Mensch}(x) \rightarrow \mathsf{Sterblich}(x))$$

$$\exists x\,(\,\exists y\,(\,\mathsf{verehrt}(x,y) \land \mathsf{Gott}(y)\,) \land \exists y\,(\,\mathsf{verheiratetMit}(x,y) \land \forall z\,(\,\mathsf{verehrt}(y,z) \rightarrow \neg\mathsf{Gott}(z)\,)\,)\,)$$

Vorschau 2

Eine weitere semantische Struktur der Logik erster Stufe:

$$0 \xrightarrow{\mathsf{nf}} 1 \xrightarrow{\mathsf{nf}} 2 \xrightarrow{\mathsf{nf}} 3 \xrightarrow{\mathsf{nf}} 4 \dashrightarrow$$

nf: Nachfolgerfunktion

Zu dieser Struktur passende Beispielformeln:

$$\forall x\, \exists y\, (\ y = \mathsf{nf}(x)\ )$$

$$\exists x\, \forall y\, \neg(\ x = \mathsf{nf}(y)\ )$$

$$y = \mathsf{nf}(\mathsf{nf}(x))$$

Übersicht Teil 2

Strukturen

Die Semantik der Prädikatenlogik basiert auf so genannten **Strukturen.**

Man kann sehr viele Dinge als Struktur repräsentieren:

- Graphen und Hypergraphen
- Wörter (im Sinne der formalen Sprachen)
- Relationale Datenbanken
- Transitionssysteme aus der Hard/Software-Verifikation
- Mathematische Strukturen wie Gruppen, Ringe, Körper
- etc.

Dies macht die Prädikatenlogik zu einem sehr generellen Werkzeug.

Strukturen

Die Namen, die in einer Struktur verwendet werden, bilden deren **Signatur**.

Definition 2.1 (Signatur)

Eine *Signatur* τ ist eine Menge von *Relations-* und *Funktionssymbolen*.
Jedes dieser Symbole hat eine feste endliche *Stelligkeit*.

Nullstellige Funktionssymbole nennen wir *Konstantensymbole*.

Beispiel:

Die Signatur der Arithmetik ist $\{+, \cdot, 0, 1\}$, wobei

$+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole

0 und 1 Konstantensymbole

Strukturen

Mehr Beispiele:

- Die Signatur eines gerichteten Graphen ist $\{E\}$, mit E zweistelligem Relationssymbol (das die Kanten repräsentiert)
- Die Signatur einer Datenbank besteht aus je einem n-stelligen Relationssymbol für jede n-spaltige Tabelle

Eine Signatur heißt

- *relational*, wenn sie keine Funktionssymbole enthält
- *funktional*, wenn sie keine Relationssymbole enthält

Die folgenden Definitionen (Struktur, Formel) beziehen sich alle auf eine Signatur τ

Strukturen

Notation: Normalerweise verwenden wir

- P, Q, R für Relationssymbole
  Relationssymbole nennen wir auch *Prädikate*
- f, g, h für Funktionssymbole
- c, d, e für Konstantensymbole
- σ, τ für Signaturen

Statt „Stelligkeit" sagen wir auch *Arität.*

Strukturen

Definition 2.2 (Struktur)

Eine *Struktur* $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nichtleeren Menge A, dem *Universum* von $\mathfrak{A}$
- für jedes n-stellige Relationssymbol P eine Relation $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$
- für jedes n-stellige Funktionssymbol f eine Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$

Eine Struktur, die genau die Symbole in τ interpretiert, heißt τ-*Struktur*.

Folgendes ist implizit:

- jedes unäre Relationssymbol wird als Teilmenge von A interpretiert
- jedes Funktionssymbol wird als *totale* Funktion interpretiert
- jedes Konstantensymbol wird als Element von A interpretiert

Strukturen

Notation:

- Strukturen bezeichnen wir mit Buchstaben in Frakturschrift $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,
- der entsprechende lateinische Buchstabe A, B, C steht für das Universum der Struktur
- die Elemente des Universums bezeichnen wir mit a, b
- $\mathfrak{A} = (A, P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ bezeichnet also eine Struktur über der Signatur $\{P_1, P_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots\}$ mit Universum A

Strukturen, Graphen, Algebren

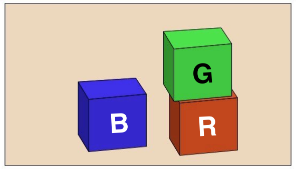
Strukturen generalisieren Graphen und Hypergraphen:

- Struktur $(A, R^{\mathfrak{A}})$ mit R binärem Relationssymbol ist nichts weiter als ein gerichteter Graph (und umgekehrt)
- Strukturen mit mehreren binären Relationssymbolen entsprechen dann kantenbeschrifteten (gerichteten) Graphen **T2.1**
- unäre Relationssymbole liefern Knotenbeschriftungen im Graphen
- n-stellige Relationssymbole mit $n > 2$ entsprechen (gerichteten) Hypergraphen

Strukturen generalisieren zudem Algebren:

Eine Struktur für eine funktionale Signatur ist nichts weiter als eine Algebra (im Sinne der universellen Algebra)

Strukturen – Beispiel 1



repräsentiert als Struktur:

Signatur:

- unäre Relationssymbole Block, R, G, B
- binäre Relationssymbole auf, unter, neben
- Konstantensymbol lieblingsblock

Struktur $\mathfrak{A}$:

- $A = \{rb, gb, bb\}$
- Block$^{\mathfrak{A}} = \{rb, gb, bb\}$, R$^{\mathfrak{A}} = \{rb\}$, G$^{\mathfrak{A}} = \{gb\}$, B$^{\mathfrak{A}} = \{bb\}$
- auf$^{\mathfrak{A}} = \{(gb, rb)\}$, unter$^{\mathfrak{A}} = \{(rb, gb)\}$, neben$^{\mathfrak{A}} = \{(bb, rb), (rb, bb)\}$
- lieblingsblock$^{\mathfrak{A}} = rb$

T2.2

Strukturen – Beispiel 2

Relationale Datenbank ist eine endliche Sammlung von Tabellen

Jeder Tabelle T zugeordnet ist Spaltenzahl n und Attribute $D_1, \dots, D_n$
(Attribute z. B. Integers, Strings etc.)

Konkrete Datenbankinstanz I ordnet dann jedem T endliche Tupelmenge $T^I \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ zu

I kann als (endliche) Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, T_1^{\mathfrak{A}}, T_2^{\mathfrak{A}}, \dots, T_k^{\mathfrak{A}})$$

repräsentiert werden, wobei

- $T_1, \dots, T_k$ Relationssymbole für die Tabellen der Datenbank sind
- A die Vereinigung über alle Attribute ist, eingeschränkt auf die (endlich vielen) in I verwendeten Objekte

Strukturen – Beispiel 2

Betrachte eine Datenbank mit 2 Tabellen:

- Tabelle *Film*, 3 Spalten:
  - Titel (Typ String)
  - Jahr (Typ pos. Integer)
  - Regisseur (Typ String)
- Tabelle *Schauspieler_in*, 2 Spalten:
  - Name (Typ String)
  - Filmtitel (Typ String)

Beispielinstanz I:

Film:

Titel	Jahr	Regisseur
Die Vögel	1963	Hitchcock
Marnie	1964	Hitchcock
Goldfinger	1964	Hamilton

Schauspieler_in:

Name	Filmtitel
Connery	Marnie
Connery	Goldfinger
Hedren	Die Vögel

Als Struktur:

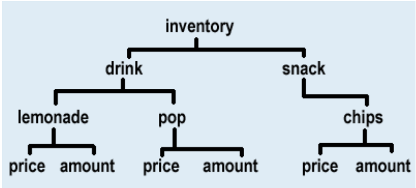
T2.3

Strukturen – Beispiel 3

XML-Dokument kann als endliche, baumförmige Struktur gesehen werden

```
<inventory>
    <drink>
        <lemonade>
            <price>$2.50</price>
            <amount>20</amount>
        </lemonade>
        <pop>
            <price>$1.50</price>
            <amount>10</amount>
        </pop>
    </drink>

    <snack>
        <chips>
            <price>$4.50</price>
            <amount>60</amount>
        </chips>
    </snack>
</inventory>
```



Signatur:

binäre Relationssymbole succ für „successor“ und
sord für „successor order“

sowie ein unäres Relationssymbol für jedes Tag (drink, snack usw.)

T2.4

Strukturen – Beispiel 4

Strukturen aus der Mathematik, z. B. Arithmetik der natürlichen Zahlen:

$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}})$ (unendlich!)

wobei

- $+^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ die natürliche Interpretation von $+$ und $\cdot$ sind:

  $$+^{\mathfrak{N}}(x, y) = x + y \qquad \cdot^{\mathfrak{N}}(x, y) = x \cdot y$$

- $0^{\mathfrak{N}} = 0$ und $1^{\mathfrak{N}} = 1$
  (0,1 sowohl Konstantensymbole als auch Elemente des Universums)

Bei offensichtlicher Interpretation lassen wir das $\cdot^{\mathfrak{N}}$ oft weg, also z.B.

$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

Analog definiert man z. B. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ (überabzählbar!)

Strukturen – Beispiel 5

Auch **Ordnungen** lassen sich als Struktur auffassen, z. B.:

- $\mathfrak{N}_< = (\mathbb{N}, <)$
- $\mathfrak{R}_< = (\mathbb{R}, <)$

(„<“ binäres Relationssymbol)

In der Informatik werden solche Strukturen oft als Repräsentation von Zeit aufgefasst; die Elemente von $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}$ sind dann die Zeitpunkte

Man kann auch zusätzliche unäre Relationssymbole zulassen, also

$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <, P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \dots)$

wobei eine beliebige Interpretation der $P_1, P_2, \dots$ möglich ist

Mögliche Interpretation:

Jedes P_i repräsentiert eine Aussage (im Sinn der Aussagenlogik),
$x \in P_i^{\mathfrak{A}}$ bedeutet: „Aussage P_i ist wahr zum Zeitpunkt x“

T2.5

Prädikatenlogik

Syntax

Analog zur Unterscheidung zwischen Relations- und Funktionssymbolen:

Formeln der Prädikatenlogik bestehen aus zwei Bestandteilen:

- *Terme*, die aus (Objekt)variablen, Konstanten- und Funktionssymbolen gebildet werden
- *Formeln* bestehen dann aus Termen, den Booleschen Operatoren, Quantoren und Relationssymbolen

Wir definieren die Syntax daher in zwei Schritten.

Syntax (Schritt 1)

Wir fixieren eine abzählbar unendliche Menge VAR $= \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ von *Objektvariablen*.

Definition 2.3 (Term)

Die Menge der *Terme* ist induktiv wie folgt definiert:

- jede Variable ist ein Term.
- wenn $t_1, \dots, t_n$ Terme sind und f ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term

Beachte: jedes Konstantensymbol ist damit ebenfalls ein Term!

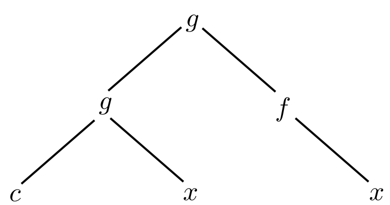
Beispiele:

$$x,\ c,\ f(x),\ g(x,x),\ g(f(x),c),\ g(g(c,c),f(x))$$

$$1 + ((1+1) \cdot 1) \qquad\qquad 1 + ((x+1) \cdot y)$$

Sprechweisen und Konventionen

- Wir bezeichnen Terme mit s und t
- Es ist oft nützlich, Terme als Bäume aufzufassen, z.B. $g(g(c,x),f(x))$ als



- Für Funktionssymbole wie $+$ und $\cdot$ verwenden wir Infix-Notation, also $x + c$ statt $+(x, c)$

Syntax (Schritt 2)

Definition 2.4 (FO-Formeln)

Die Menge der *Formeln* der Prädikatenlogik ist induktiv wie folgt definiert:

- sind t_1, t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel
- sind $t_1, \dots, t_n$ Terme und P ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $P(t_1, \dots, t_n)$ eine Formel

$\Big\}$ Atome

- wenn φ und ψ Formeln sind, dann auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$
- wenn φ eine Formel ist und $x \in$ VAR, dann sind $\exists x\, \varphi$ und $\forall x\, \varphi$ Formeln

Die Menge aller Formeln über einer Signatur τ bezeichnen wir mit FO(τ).

Beispiele: $x = c \qquad (P(x) \wedge Q(x)) \vee P(y) \qquad \forall x\, \exists y\, P(x, f(y))$

$$\forall x\ \big(\ \exists y\, \mathsf{neben}(y,x) \vee \exists y\, \mathsf{auf}(y,x)\ \big)$$

$$\exists y\ \big(\ \mathsf{Film}(x, y, \mathsf{Hitchcock}) \wedge \mathsf{Schauspieler}(\mathsf{Connery}, x)\ \big)$$

Sprechweisen und Konventionen

- Atome und deren Negation heißen *Literale*
- Statt $\neg(t = t')$ schreiben wir auch $t \neq t'$
- $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind analog zur AL definiert
- Klammern werden weggelassen, wenn das Resultat eindeutig ist,
  wobei $\neg$, $\exists$, $\forall$ stärker binden als $\wedge$, $\vee$
  und $\wedge$, $\vee$ stärker binden als $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

  Also z. B. $\exists x\, P(x) \vee Q(x)$ für $(\exists x\, P(x)) \vee Q(x)$,
  nicht für $\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$

Freie und gebundene Variablen

Ein *Vorkommen* einer Variable in einer Formel kann durch einen Quantor *gebunden* sein oder nicht (dann ist die Variable *frei*)

Beispiel:

$$\varphi = P(\underbrace{x}_{\text{frei}}) \wedge \exists x\, Q(\underbrace{x}_{\text{gebunden}})$$

Einige Konventionen:

- Wenn wir eine Formel mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen,
  so sind $x_1, \ldots, x_n$ die freien Variablen in φ; für obige Formel: $\varphi(x)$
- Formeln ohne freie Variablen heißen *Satz*

Freie und gebundene Variablen

Präzise definiert man die Menge der freien Variablen wie folgt.

Mit $\mathsf{Var}(\varphi)$ bezeichnen wir die Menge der in der Formel φ vorkommenden Variablen.

Definition 2.5 (Freie Variable)

Sei φ eine Formel. Die Menge $\mathsf{Frei}(\varphi)$ der *freien Variablen* von φ ist induktiv wie folgt definiert:

- Für atomare Formeln φ ist $\mathsf{Frei}(\varphi) = \mathsf{Var}(\varphi)$
- $\mathsf{Frei}(\neg\varphi) = \mathsf{Frei}(\varphi)$
- $\mathsf{Frei}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{Frei}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{Frei}(\varphi) \cup \mathsf{Frei}(\psi)$
- $\mathsf{Frei}(\exists x\, \varphi) = \mathsf{Frei}(\forall x\, \varphi) = \mathsf{Frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Was bisher geschah …

Syntax der Prädikatenlogik

Terme:

$$t: \quad \underbrace{x}_{\text{Var.}} \mid \overbrace{c}^{\text{Konst.}} \mid \underbrace{f(t_1, \ldots, t_n)}_{n\text{-stell. Funktionssymbol angewendet auf } n \text{ Terme}}$$

Formeln:

$$\varphi: \quad \underbrace{t_1 = t_2 \mid R(t_1, \ldots, t_n)}_{\text{Atome}} \mid \underbrace{\neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi}_{\text{Boolesche Operatoren}} \mid \underbrace{\exists x\, \varphi \mid \forall x\, \varphi}_{\text{Quantoren}}$$

Sätze: Formeln ohne freie Variablen
Vorkommen nicht durch Quantor gebunden

Strukturen

$$\mathfrak{A} = (\underbrace{A}_{\text{nicht leeres Universum}}, \underbrace{P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, \ldots}_{\text{Interpretation aller Relations- und Funktionssymbole}})$$

Semantik (Schritt 1)

Struktur interpretiert nur Symbole, aber keine Variablen – dafür Zuweisung:

Definition 2.6 (Zuweisung)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur. Eine *Zuweisung in* $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung β : VAR $\to A$.
Man erweitert β wie folgt induktiv auf Terme:

- wenn $t = f(t_1, \dots, t_k)$, dann $\beta(t) = f^{\mathfrak{A}}(\beta(t_1), \dots, \beta(t_k))$

Ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit β Zuweisung in $\mathfrak{A}$ heißt *Interpretation*.

Beachte: der implizite Induktionsanfang ist:

- wenn $t = x \in$ VAR, dann $\beta(t) = \beta(x)$
- wenn $t = c$ Konstante, dann $\beta(t) = c^{\mathfrak{A}}$

T2.6

Semantik (Schritt 2)

Definition 2.7 (Semantik von FO)

Wir definieren Erfülltheitsrelation $\models$ zwischen Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ und FO-Formeln induktiv wie folgt:

- $\mathfrak{A}, \beta \models t = t'$ gdw. $\beta(t) = \beta(t')$
- $\mathfrak{A}, \beta \models P(t_1, \dots, t_n)$ gdw. $(\beta(t_1), \dots, \beta(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \neg\varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \not\models \varphi$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \wedge \psi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ und $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi \vee \psi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ oder $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \exists x\, \varphi$ gdw. ein $a \in A$ existiert mit $\mathfrak{A}, \overbrace{\beta[x/a]}^{\text{Wie } \beta \text{, außer } x \mapsto a} \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \forall x\, \varphi$ gdw. für alle $a \in A$ gilt, dass $\mathfrak{A}, \beta[x/a] \models \varphi$

Wenn $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$, dann ist $(\mathfrak{A}, \beta)$ ein *Modell* für φ.

T2.7

Koinzidenzlemma

Analog zur Aussagenlogik: $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ ist unabhängig von Interpretation der Symbole und Variablen, die in φ gar nicht (bzw. nicht frei) vorkommen.

sig(φ) bezeichne die Signatur der Formel φ, also die Menge der in φ vorkommenden Relations- und Funktionssymbole

Lemma 2.8 (Koinzidenzlemma)

Sei φ eine FO-Formel und $(\mathfrak{A}, \beta)$, $(\mathfrak{A}', \beta')$ Interpretationen, so dass

- $A = A'$;
- $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{A}'}$ für alle $S \in$ sig(φ)
- für alle $x \in$ Frei(φ) gilt: $\beta(x) = \beta'(x)$

Dann $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}', \beta' \models \varphi$

Beweis per Induktion über die Struktur von φ.

Koinzidenzlemma

Wenn wir mit einer Formel φ arbeiten, so erlaubt uns das Koinzidenzlemma, in Zuweisungen nur die Variablen Frei(φ) zu betrachten.

Das erlaubt insbesondere folgende Notation:

Für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ schreiben wir

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]$$

wenn $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$, wobei $\beta(x_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq k$

Wenn φ Satz ist, dann wird daraus einfach $\mathfrak{A} \models \varphi$

Isomorphielemma

Es existiert ein Isomorphismus zwischen zwei Strukturen gdw. diese sich nur durch Umbenennen der Elemente des Universums unterscheiden.

Definition 2.9 (Isomorphismus)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen. Bijektion $\pi : A \to B$ ist *Isomorphismus*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für jedes n-stellige Relationssymbol P und alle $a_1, \ldots, a_n \in A^n$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol f und alle $a_1, \ldots, a_n \in A^n$:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$$

Beispiel

T2.8

Isomorphielemma

Lemma 2.10 (Isomorphielemma)

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Strukturen und $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus.
Dann gilt für alle Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)]$$

T2.9

Insbesondere gilt also für alle Sätze φ: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Intuitiv:

- FO kann nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden
- Die Namen der Elemente des Universums sind Schall und Rauch

Prädikatenlogik

Auswertung

Definition 2.11 (Auswertungsproblem)

Das *Auswertungsproblem der Prädikatenlogik* ist:

Gegeben: FO-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, endliche Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit β Zuweisung für $x_1, \ldots, x_n$

Frage: Gilt $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$?

Theorem 2.12

Das Auswertungsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe ist PSpace-vollständig.

Wir wollen hier nur Entscheidbarkeit in PSpace beweisen.

PSpace-Härte zeigt man über eine Reduktion von QBF,
(siehe VL Komplexitätstheorie)

Auswertung

Function $\texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \varphi)$**:**

input : endl. Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$, FO-Formel φ

output: Wahrheitswert: 1 für $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$, 0 für $\mathfrak{A}, \beta \not\models \varphi$

switch φ **do**

- **case** $\varphi = (t = t')$: **if** $\beta(t) = \beta(t')$ **then return** 1 **else return** 0
- **case** $\varphi = P(t_1, \dots, t_k)$:
  - **if** $(\beta(t_1), \dots, \beta(t_k)) \in P^{\mathfrak{A}}$ **then return** 1 **else return** 0
- **case** $\varphi = \neg\psi$: **return** $1 - \texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi)$
- **case** $\varphi = \psi \wedge \vartheta$: **return** $\min\{\texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi), \texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \vartheta)\}$
- **case** $\varphi = \psi \vee \vartheta$: **return** $\max\{\texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi), \texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \vartheta)\}$
- **case** $\varphi = \exists x\, \psi$:
  - rufe ausw $(\mathfrak{A}, \beta[x/a], \psi)$ für alle $a \in A$
  - **if** *ein Ruf erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0
- **case** $\varphi = \forall x\, \psi$:
  - rufe ausw $(\mathfrak{A}, \beta[x/a], \psi)$ für alle $a \in A$
  - **if** *alle Rufe erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0

T2.10

Auswertung

Lemma 2.13

Der Algorithmus ausw

1. ist korrekt: $\texttt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \varphi) = 1$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$
2. benötigt nur polynomiell viel Platz

Für den Beweis: T2.11

Die *Schachtelungstiefe* st(φ) einer Formel φ ist induktiv definiert wie folgt:

- st($t = t'$) = st($P(t_1, \dots, t_k)$) = 0
- st($\neg\varphi$) = st($\exists x\, \varphi$) = st($\forall x\, \varphi$) = st(φ) $+ 1$
- st($\varphi \wedge \psi$) = st($\varphi \vee \psi$) = max{st(φ), st(ψ)} $+ 1$

Leicht per Induktion zu zeigen: st(φ) $\leq |\varphi|$ ($|\varphi|$ ist Länge von φ)

PS: Der Algorithmus benötigt natürlich exponentiell viel Zeit

FO und Datenbanken

Man kann FO auf natürliche Weise als Anfragesprache für DBen sehen:

- schon gesehen: Datenbankinstanz $\approx$ relationale Struktur
- Antwort auf FO-Anfrage $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bzgl. Datenbankinstanz $\mathfrak{A}$:

$$\text{ans}(\mathfrak{A}, \varphi) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$$

Film:

Titel	Jahr	Regisseur
Die Vögel	1963	Hitchcock
Marnie	1964	Hitchcock
Goldfinger	1964	Hamilton

Schauspieler_in:

Name	Filmtitel
Connery	Marnie
Connery	Goldfinger
Hedren	Die Vögel

$$\varphi(x) = \exists y \left(\text{Film}(x, y, \text{Hitchcock}) \wedge \text{Schauspieler}(\text{Connery}, x)\right)$$

„Gib die Titel aller Hitchcock-Filme, in denen Connery mitspielt“

ans($\mathfrak{A}, \varphi$) = {Marnie}

T2.12

FO und Datenbanken

In diesem Zusammenhang wird FO auch das *relationale Kalkül* genannt

FO/das relationale Kalkül ist im Wesentlichen nichts anderes als SQL!

Beispiele:

```
SELECT Titel FROM Film WHERE Regisseur = Hitchcock
```

$\exists y\, \text{Film}(x, y, \text{Hitchcock})$

```
SELECT Name,Jahr FROM Schauspieler,Film
                 WHERE Schauspieler.Titel = Film.Titel
```

$\exists z \exists z'\, (\,\text{Schauspieler}(x, z) \wedge \text{Film}(z, y, z')\,)$

FO und Datenbanken

Sei *Kern-SQL* die Einschränkung von SQL auf

`SELECT FROM WHERE` (in Bedingungen sind = und `AND` erlaubt),
`UNION`,
`MINUS`

Die meisten anderen Elemente von SQL dienen nur der Benutzbarkeit, erhöhen aber nicht die Ausdrucksstärke

Nicht sehr schwer:
jede Kern-SQL-Anfrage kann in äquivalente FO-Anfrage übersetzt werden
(äquivalent = dieselben Antworten auf jeder Datenbank)

Für die Übersetzung FO ⇒ SQL muss man eine Einschränkung machen:

Domänenunabhängigkeit der FO-Anfrage

FO und Datenbanken

Intuitiv: Anfrage ist domänenunabhängig, wenn Antworten *nicht* von Elementen abhängen, die in *keiner* Relation/Tabelle vorkommen.

Definition 2.14 (Domänenunabhängigkeit)

Eine FO-Formel φ ist *domänenunabhängig,*
wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \dots)$ und $B \supseteq A$ gilt:

$$\text{ans}(\mathfrak{A}, \varphi) \;=\; \text{ans}((B, P_1^{\mathfrak{A}}, P_2^{\mathfrak{A}}, \dots), \varphi).$$

T2.13

Domänen*abhängige* FO-Anfragen sind meist *sinnlos:*

$\neg\exists y\, \text{Schauspieler}(x, y)$

liefert alle in der Datenbank verwendeten Strings und Zahlen
außer Connery und Hedren

FO und Datenbanken

Alle Übersetzungen von Kern-SQL-Anfragen in FO
sind domänenunabhängig, z. B.:

```
SELECT Titel FROM Film WHERE Regisseur = Hitchcock
```

$\exists y\, \text{Film}(x, y, \text{Hitchcock})$

denn Elemente aus $A \setminus \bigcup_{i \geq 1} P_i^{\mathfrak{A}}$ werden nie als Antwort zurückgegeben

Die Umkehrung gilt auch, aber modulo Äquivalenz:

FO und Datenbanken

Folgendes Resultat von 1970 ist die Grundlage für die Entwicklung der relationalen Datenbanksysteme.

(Codd arbeitete bei IBM,
implementierte die erste relationale Datenbank „System R“)

Theorem 2.15 (Codd)

Jede domänen*unabhängige* FO-Anfrage ist *äquivalent* zu einer Anfrage in Kern-SQL und umgekehrt. Die Übersetzung benötigt nur lineare Zeit.

Unser Algorithmus für FO-Auswertung kann also auch zur SQL-Anfragebeantwortung verwendet werden!

Prädikatenlogik

Äquivalenz

Definition 2.16 (Äquivalenz)

Zwei FO-Formeln φ und ψ mit Frei$(\varphi) =$ Frei(ψ) sind *äquivalent,* wenn für alle Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt: $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$.
Wir schreiben dann: $\varphi \equiv \psi$

Der Begriff einer *Teilformel* einer FO-Formel kann auf die offensichtliche Weise induktiv definiert werden, analog zur Aussagenlogik.

Auch in FO sind äquivalente Formeln austauschbar:

Lemma 2.17 (Ersetzungslemma)

Seien φ und ψ äquivalente FO-Formeln, ϑ eine Formel mit $\varphi \in$ TF(ϑ) und ϑ' eine Formel, die sich aus ϑ ergibt, indem ein beliebiges Vorkommen von φ durch ψ ersetzt wird. Dann gilt $\vartheta \equiv \vartheta'$.

Beweis per Induktion über die Struktur von ϑ.

Äquivalenz

Leicht zu sehen: alle Äquivalenzen aus der Aussagenlogik gelten auch in FO, z. B.:

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \qquad \text{für beliebige FO-Formeln } \varphi, \psi$$

Natürlich gibt es auch interessante FO-spezifische Äquivalenzen, z. B.:

- $\forall x\, \varphi \equiv \neg\exists x\, \neg\varphi$ (Dualität von $\exists$ und $\forall$)
- $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$ ($\exists$ distribuiert über $\vee$)
- $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi$ ($\forall$ distribuiert über $\wedge$)
- $\exists x\, \exists y\, \varphi \equiv \exists y\, \exists x\, \varphi$
- $\forall x\, \forall y\, \varphi \equiv \forall y\, \forall x\, \varphi$

Reduzierte Formeln

FO-Formel heißt *reduziert,*
wenn sie nur die Junktoren $\neg, \wedge$ und nur den Quantor $\exists$ enthält

Lemma 2.18

Jede FO-Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente reduzierte FO-Formel gewandelt werden.

Beweis klar wegen

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$
$$\forall x\, \varphi \equiv \neg\exists x\, \neg\varphi$$

In Induktionsbeweisen müssen wir also nur $\neg, \wedge, \exists$ betrachten

Erfüllbarkeit, Gültigkeit, Konsequenz

Folgende Begriffe sind exakt analog zur Aussagenlogik:

Definition 2.19 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit, Konsequenz)

Ein Satz φ heißt

- *erfüllbar,* wenn er ein Modell hat (Struktur, die ihn wahr macht)
- *gültig* oder *Tautologie,* wenn jede Struktur ein Modell von φ ist
- *Konsequenz* von Satz ψ, wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \psi$ auch $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt (wir schreiben dann $\psi \models \varphi$)

T2.14

Man kann diese Begriffe natürlich auch für Formeln mit freien Variablen definieren; verwendet dann Interpretationen statt Strukturen.

Prädikatenlogik

Pränex-Normalform

FO-Formel φ ist *bereinigt,* wenn

- keine Variable in φ sowohl frei als auch gebunden auftritt
- keine Variable mehr als einmal quantifiziert wird

Jede Formel kann leicht durch *Umbenennung quantifizierter Variablen* bereinigt werden, z. B.:

$$\exists y\,(P(\underline{x},y) \land \forall x\, Q(x,y)) \quad \text{äquivalent zu} \quad \exists y\,(P(\underline{x},y) \land \forall z\, Q(z,y))$$

Definition 2.20 (Pränex-Normalform)

Eine FO-Formel φ ist in *Pränex-Normalform (PNF),* wenn sie bereinigt ist und die Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, \varphi$$

hat, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und φ quantorenfrei ist.

Pränex-Normalform

Theorem 2.21

Jede FO-Formel kann in Linearzeit in eine äquivalente Formel in PNF gewandelt werden.

Für den Beweis benötigen wir folgende Äquivalenzen:

Falls x nicht frei in φ vorkommt, gilt:

- $\varphi \lor \exists x\, \psi \equiv \exists x\, (\varphi \lor \psi)$
- $\varphi \land \exists x\, \psi \equiv \exists x\, (\varphi \land \psi)$
- $\varphi \lor \forall x\, \psi \equiv \forall x\, (\varphi \lor \psi)$
- $\varphi \land \forall x\, \psi \equiv \forall x\, (\varphi \land \psi)$ T2.15

Beweis von Theorem 2.21 T2.16

… liefert auch gleichzeitig das Verfahren zur Umwandlung

Beispiel T2.17

Prädikatenlogik

2.1 Strukturen

2.2 Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

2.3 Auswertung und Datenbanken

2.4 Äquivalenz, Erfüllbarkeit, Gültigkeit

2.5 Pränex-Normalform

NEXT **2.6 Unentscheidbarkeit**

2.7 Theorien

Unentscheidbarkeit

Bis in die 1930er hofften viele Mathematiker_innen, dass die Prädikatenlogik oder ähnlich ausdrucksstarke Logiken entscheidbar sein würden.

Besonders prominent ist Hilbert, der 1928 die Lösung des „Entscheidungsproblems“ der Logik als eines der wichtigsten offenen Probleme der Mathematik bezeichnet hat.

Da wichtige Teile der Mathematik in FO formalisierbar (z. B. Gruppentheorie): viele manuelle mathematische Beweise könnten durch automatische ersetzt werden.

Aber das wäre dann doch zu schön, um wahr zu sein …

Lesetipp

Unentscheidbarkeit

Wir zeigen, dass die Gültigkeit von FO-Formeln unentscheidbar ist.

(Gegeben ein FO-Satz, entscheide, ob dieser gültig ist.)

Unentscheidbarkeit von Erfüllbarkeit und Konsequenz folgt dann per Reduktion von Gültigkeit, denn analog zur Aussagenlogik gilt:

- Satz φ ist gültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar ist
- Satz φ ist gültig gdw. $\varphi_{\text{taut}} \models \varphi$, wobei φ_{taut} beliebige Tautologie

Der Beweis ist per Reduktion des Postschen Korrespondenzproblems

Das Postsche Korrespondenzproblem

Wir verwenden eine Reduktion des Postschen Korrespondenzproblems

Definition 2.22 (Postsches Korrespondenzproblem, PKP)

Gegeben: Eine Folge $F = (u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ von Wortpaaren mit $u_i, v_i \in \{0,1\}^*$

Frage: Gibt es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass $u_{i_1} \cdots u_{i_\ell} = v_{i_1} \cdots v_{i_\ell}$?

Eine solche Folge heißt *Lösung* für F.

T2.18

Bekannt aus VL „Theoretische Informatik 2“:

Theorem 2.23 (Post)

Das PKP ist unentscheidbar.

Reduktion des PKP

Ziel: Für gegebenes PKP F einen FO-Satz φ_F konstruieren, so dass:

F hat eine Lösung gdw. φ_F gültig ist.

Verwendete Signatur:

- ein Konstantensymbol c_ε
- zwei einstellige Funktionssymbole f_0 und f_1
- ein zweistelliges Relationssymbol P

Intuition:

- c_ε, f_0, f_1 erzeugen alle Wörter
- P kennzeichnet Wortpaare, die F erzeugen kann

T2.19

Details der Reduktion

Schreibweise:

Für Wort $w = w_1 \cdots w_n \in \{0,1\}^*$ steht $t_w(x)$ für $f_{w_n}(f_{w_{n-1}}(\cdots f_{w_1}(x)))$

Für PKP $F = (u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ setze

$$\varphi_F = (\varphi \land \psi) \to \exists x\, P(x,x)$$

wobei

$$\varphi = \bigwedge_{i=1,\ldots,k} P(t_{u_i}(c_\varepsilon), t_{v_i}(c_\varepsilon))$$

$$\psi = \forall x\, \forall y \Big(P(x,y) \to \bigwedge_{i=1,\ldots,k} P(t_{u_i}(x), t_{v_i}(y)) \Big)$$

Lemma 2.24

F hat eine Lösung gdw. φ_F gültig ist.

T2.20

Unentscheidbarkeit

Theorem 2.25 (Church,Turing)

In FO sind Gültigkeit, Erfüllbarkeit, Konsequenz unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit gilt auch für *relationale* Signaturen:

- ersetze c_ε durch unäres Relationssymbol A_ε
- ersetze f_0, f_1 durch binäre Relationssymbole P_0, P_1
- erzwinge das „richtige Verhalten“:

$$\exists x \; (\; A_\varepsilon(x) \land \forall y \, (A_\varepsilon(y) \to x = y) \;)$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \, \exists y \, P_i(x,y) \\ \forall x \forall y \forall z \, ((P_i(x,y) \land P_i(x,z)) \to y = z) \end{array}\right. \quad \text{für } i \in \{0,1\}$$

Beachte: Datenbanken haben rein relationale Signaturen.

Auch die Gleichheit ist durch beliebiges Relationssymbol simulierbar.

Unentscheidbarkeit bzgl. endlicher Modelle

Beachte:

Die vorgestellte Reduktion erfordert unendliche Modelle.

In der Informatik benötigt man aber meist nur endliche Modelle (z. B. Datenbanken).

Das liefert unterschiedliche Begriffe von Erfüllbarkeit, Tautologie etc.

Z. B. ist folgende Formel erfüllbar, aber nicht endlich erfüllbar

$$\begin{array}{l} \forall x\, \neg R(x,c) \land \\ \forall x\, \exists y\, R(x,y) \land \\ \forall x \forall x' \forall y\, (\, R(x,y) \land R(x',y) \to x = x' \,) \end{array}$$

T2.21

Ihre Negation ist also eine Tautologie in endlichen Modellen, aber nicht im Allgemeinen.

Unentscheidbarkeit bzgl. endlicher Modelle

Theorem 2.26 (Trakhtenbrot)

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Endliche Gültigkeit:
  Ist eine FO-Formel in allen endlichen Interpretationen erfüllt?
- Endliche Erfüllbarkeit:
  Hat eine FO-Formel ein endliches Modell?
- Endliche Konsequenz:
  Gilt für zwei FO-Formeln φ, ψ und alle endlichen Interpretationen $(\mathfrak{A}, \beta)$ mit $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ auch $\mathfrak{A}, \beta \models \psi$?

Beweis z. B. durch Reduktion des Halteproblems

Unentscheidbarkeit bzgl. endlicher Modelle

Da alle Formeln im Beweis von Trakhtenbrots Theorem domänenunabhängig sind, sind auch folgende SQL-Probleme unentscheidbar:

1. Gegeben eine SQL-Anfrage, entscheide ob es eine Datenbank-Instanz gibt, für die die Anfrage eine nicht-leere Antwort liefert
2. Gegeben zwei SQL-Anfragen, entscheide ob für jede Datenbank-Instanz gilt: die Antwort für die erste Anfrage ist eine Teilmenge der Antwort für die zweite Anfrage *(Query containment)*
3. Gegeben zwei SQL-Anfragen, entscheide ob sie für alle Datenbank-Instanzen dieselben Antworten liefern.

Diese Probleme sind von praktischer Bedeutung, z. B. für die Anfrageoptimierung in relationalen Datenbanksystemen.

Trotz Unentscheidbarkeit …

Es gibt aber auch Positives zu berichten:

- Die gültigen FO-Formeln sind *rekursiv aufzählbar (= semi-entscheidbar)* (☛ Teil 3); dies ist die Grundlage für automatisches Theorembeweisen

  Intuitiv:

  - Wenn man den Beweiser nach einem *gültigen* mathematischen Theorem fragt, findet er schließlich (d. h. nach endlicher Zeit) einen Beweis.
  - Wenn man den Beweiser nach einem *nicht gültigen* Theorem fragt, terminiert er nicht.

- Über verschiedenen wichtigen Strukturklassen wie Wörtern und Bäumen erhält man Entscheidbarkeit — sogar für Logik 2. Stufe (☛ Teil 4).

  Wichtige Anwendungen in der Verifikation

Trotz Unentscheidbarkeit …

Es gibt noch mehr Positives zu berichten:

- Verschiedene syntaktische Einschränkungen liefern Entscheidbarkeit:

  1. Nur unäre Relationssymbole, keine Funktionssymbole
  2. Nur 2 Variablen statt unendlich viele
  3. Formeln in PNF mit eingeschränktem Quantorenpräfix, z.B. $\exists^*\forall^*$
  4. Guarded Fragment: bei $\exists x\,\varphi$ und $\forall x\,\varphi$ Form von φ eingeschränkt
  5. Guarded Negation: Verwendung von Negation eingeschränkt

  Wichtige Anwendungen in der KI und der Verifikation

- Im Folgenden: verschiedene wichtige FO-Theorien sind entscheidbar

  Wichtig z. B. für das Theorembeweisen in der Mathematik

Zu 2.: M. Mortimer. *On Languages with Two Variables.* Zeitschr. f. Logik u. Grundl. d. Math. 21: 135–140 (1975)
Zu 3.: E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich. *The Classical Decision Problem.* Springer 1997.
Zu 4.: E. Grädel. *On the Restraining Power of Guards.* J. Symb. Log. 64(4): 1719–1742 (1999)
Zu 5.: V. Bárány, B. ten Cate, L. Segoufin. *Guarded Negation.* J. ACM 62(3): 22:1–22:26 (2015)

Prädikatenlogik

FO-Theorien

Manche Strukturen haben eine besondere Bedeutung, z. B.:

Arithmetik der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1)$

Die in dieser Struktur erfüllten FO-Sätze sind mathematisch von großer Bedeutung.

Bereits gesehen:
die Existenz unendlich vieler Primzahl-Zwillinge ist in FO beschreibbar.

Weiteres Beispiel: Goldbachsche Vermutung

$$\forall x\,\Big(x>2 \land \text{Even}(x) \;\rightarrow\; \exists y \exists y'\,\big(\text{Prim}(y) \land \text{Prim}(y') \land x=y+y'\big)\Big)$$

wobei $\text{Even}(x) \;=\; \exists y\,(x=y+y)$ etc.

Theorien sind „kohärente“ Mengen von FO-Sätzen,
z. B. diejenigen Sätze, die in einer ausgewählten Struktur wahr sind.

FO-Theorien

Betrachten nun **Mengen von Formeln** (endlich oder unendlich).

Definition 2.27 (Semantik Formelmengen)

Sei Γ eine (endliche oder unendliche) Menge von FO-Sätzen.

- Struktur $\mathfrak{A}$ ist *Modell* für Γ ($\mathfrak{A} \models \Gamma$), wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Gamma$.
- Γ ist *erfüllbar,* wenn Γ ein Modell hat.
- FO-Satz ψ *folgt aus* Γ ($\Gamma \models \psi$), wenn für alle $\mathfrak{A} \models \Gamma$ auch $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt.

Für die folgende Definition nehmen wir (implizit) eine feste Signatur τ an, über der alle Formeln gebildet werden.

Definition 2.28 (FO-Theorie)

Eine *FO-Theorie* ist eine erfüllbare Menge Γ von FO-Sätzen, die unter Konsequenz abgeschlossen ist:

$$\Gamma \models \varphi \;\text{ impliziert }\; \varphi \in \Gamma \qquad \text{für alle Sätze } \varphi$$

Γ heißt *vollständig,* wenn für alle Sätze φ gilt: $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$

Beispiele für FO-Theorien

1. Menge aller Tautologien Taut(τ) (in einer fixen Signatur τ) ist FO-Theorie; enthalten in allen anderen Theorien, nicht vollständig

T2.22

2. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann ist

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

eine vollständige FO-Theorie.

3. Wenn Ω erfüllbare Menge von FO-Sätzen, dann ist

$$\mathsf{Abschluss}(\Omega) = \{\varphi \text{ ist } \tau\text{-Satz} \mid \Omega \models \varphi\}$$

FO-Theorie (im Allgemeinen nicht vollständig)

4. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen. Dann ist

$$\mathsf{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$$

eine FO-Theorie (im Allgemeinen nicht vollständig).

Entscheidbarkeit von Theorien

Definition 2.29 (Entscheidbarkeit von Theorien)

Theorie Γ ist *entscheidbar,* wenn folgendes Problem entscheidbar ist:

Gegeben: ein FO-Satz φ

Frage: ist $\varphi \in \Gamma$?

Wenn $\Gamma = \mathsf{Th}(\mathfrak{A})$, dann ist das also folgendes Problem:

Gegeben φ, entscheide ob $\mathfrak{A} \models \varphi$.

- Das ist nicht Erfüllbarkeit oder Gültigkeit, denn wir reden über eine feste Struktur statt über alle Strukturen.
- Das ist nicht das bereits besprochene Auswertungsproblem, denn interessante $\mathfrak{A}$ sind unendlich!

Einige wichtige FO-Theorien

Arithmetik der natürlichen Zahlen: $\mathsf{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

Unentscheidbar und nicht rekursiv aufzählbar
(letzteres ist Gödels berühmter 1. Unvollständigkeitssatz)

Presburger-Arithmetik: $\mathsf{Th}(\mathbb{N}, +, 0, 1)$

z.B. $\forall x\, ((x + x = x) \rightarrow x = 0)$

Entscheidbar, ungefähr 2ExpSpace-vollständig

Zu schwach, um wirklich interessante mathematische Probleme auszudrücken, aber wichtige Anwendungen in der Informatik!

Skolem-Arithmetik: $\mathsf{Th}(\mathbb{N}, \cdot, 0, 1)$

Entscheidbar, ungefähr 3ExpSpace-vollständig

Einige wichtige FO-Theorien

Arithmetik der reellen Zahlen: $\mathsf{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

z. B. $\forall x \forall y \forall z \Big(\big(\underbrace{x = y \cdot y}_{x = y^2} \wedge \underbrace{x = z \cdot z}_{x = z^2} \big) \rightarrow \big(y = z \vee \underbrace{y = z - (2 \cdot z)}_{y = -z} \big) \Big)$

Entscheidbar, ungefähr ExpSpace-vollständig

Man vergrößert hier also den Zahlenbereich und bekommt dadurch ein einfacheres Entscheidungsproblem.

Beachte:

Aus der Unentscheidbarkeit von $\mathsf{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ folgt, dass man keine FO-Formel Nat(x) finden kann, die $\mathbb{N}$ in $\mathsf{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ definiert.

Charakterisierung der Vollständigkeit

Interessanterweise hängt der Begriff der Vollständigkeit sehr eng mit der Definition von Theorien durch Strukturen zusammen.

Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ heißen *elementar äquivalent,*
wenn für alle Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A}' \models \varphi$

Lemma 2.30

Sei Γ eine FO-Theorie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Γ ist vollständig
2. $\Gamma = \text{Th}(\mathfrak{A})$ für eine Struktur $\mathfrak{A}$
3. alle Modelle $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ von Γ sind elementar äquivalent

T2.23