Automatentheorie und ihre Anwendungen

Übungsblatt 5

Abgabe bis **Mo., 14. 1., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 5“, als PDF.
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (30 %) Betrachte folgenden Ansatz für eine Prozedur zum Determinisieren von NBAs:

Die Grundidee ist, wie in der ursprünglichen Potenzmengenkonstruktion sowohl die Menge der erreichbaren Zustände zu „speichern“ sowie zusätzlich die Menge der Zustände, die seit dem letzten Zurücksetzen (Löschen der Markierung !) erreicht werden. Dann ist ein Run erfolgreich, wenn auf ihm unendlich oft zurückgesetzt wird. Dies kann man als eine Vereinfachung von Safras Konstruktion ansehen, bei der es nur eine einzige Ebene unterhalb der Wurzel und dort nur maximal ein Kind gibt.

Genauer: gegeben einen NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, konstruiere den DBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

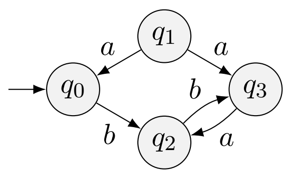
- $Q' = \{(X, Y, m) \mid Y \subseteq X \subseteq Q,\ m \in \{!, \bigcirc\}$
- $I' = \{(I, \emptyset, \bigcirc)\}$
- $F' = \{(X, \emptyset, !) \mid X \subseteq Q\}$
- $\big((X, Y, m), a, (X', Y', m')\big) \in \Delta'$ genau dann, wenn man (X', Y', m') mit der folgenden Konstruktion aus (X, Y, m) erhält.
  (1) Setze $m = \bigcirc$.
  (2) Füge $X \cap F$ zur Menge Y hinzu.
  (3) Wende die ursprüngliche Potenzmengenkonstruktion auf X und Y an.
  (4) Wenn $X = Y \neq \emptyset$, dann setze $Y = \emptyset$ und $m = !$.

Zeige, dass diese Konstruktion *korrekt* ist (d. h. keine „schlechten“ Wörter werden akzeptiert), aber nicht *vollständig* (d. h. mindestens ein „gutes“ Wort wird möglicherweise nicht akzeptiert):

a) Zeige, dass für alle Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

b) Gib einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an mit $L_\omega(\mathcal{A}') \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

2. (20 %) Betrachte Büchi-Automaten, deren Zustände, Anfangszustand und Überführungsrelation im nebenstehenden Bild gegeben sind. Ist die erkannte ω-Sprache leer, wenn die Menge der akzeptierenden Zustände wie folgt gewählt wird? Begründe jeweils mittels des in der Vorlesung vorgestellten Leerheitstests.



a) $F = \{q_0, q_1\}$ b) $F = \{q_2, q_3\}$ c) $F = \{q_1, q_3\}$

Bitte wenden.

3. (20 %) Küchenroboter Cookie kann kochen (k) und abwaschen (a), bei Bedarf auch beides gleichzeitig. Für jede der folgenden Eigenschaften gib eine LTL-Formel φ mit atomaren Aussagen k, a an, so dass für einen unendlichen Lebenszyklus von Cookie (Pfad) s gilt: $s, 0 \models \varphi$ gdw. s die Eigenschaft erfüllt.

   a) Es gibt einen Zeitpunkt, an dem Cookie nicht gleichzeitig kocht und abwäscht.

   b) Wenn es einen Zeitpunkt gibt, von dem an Cookie immer kocht, dann wäscht er unendlich oft ab.

   c) Cookie wäscht unendlich oft ab, und zwischen zwei Zeitpunkten, an denen er abwäscht, kocht er immer.

   d) Cookie kocht unendlich oft, und zwischen zwei Zeitpunkten, an denen er kocht, gibt es mindestens einen, an dem er abwäscht, und mindestens einen, an dem er nicht abwäscht.

4. (30 %) Gegeben ist die LTL-Formel $\varphi = \mathsf{X}(a \mathbin{\mathsf{U}} b)$ mit den Aussagenvariablen a, b. Konstruiere den zugehörigen GNBA $\mathcal{A}_\varphi$ gemäß der Konstruktion aus der Vorlesung.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeige, dass es keine Zahl $k \geq 1$ gibt, so dass die folgende Aussage gilt:

   Wenn $L \subseteq \Sigma^\omega$ Büchi-erkennbar ist, dann gibt es einen Büchi-Automaten mit höchstens k akzeptierenden Zuständen, der L erkennt.

   Hinweis: Betrachte die Sprachen $\{(ab^i)^\omega \mid i \leq k+1\}$, $k \geq 1$.