Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 5: Alternierung

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

Warum Alternierung?

- Starke Beziehungen zwischen Logik und Automaten, z. B.:
  - NBAs $\leftrightarrow$ LTL (Teil 3 dieser Vorlesung)
  - NEAs $\leftrightarrow$ S1S (Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot, VL Logik)
- In Logiken kann man aber Sprachen oder Eigenschaften oft deutlich kürzer ausdrücken, z. B.:
  - LTL-Formel $\rightarrow$ NBA: exponentielle Explosion
  - S1S-Formel $\rightarrow$ NEA: sogar nicht-elementare Explosion
- Verkleinern dieser Lücke:

  Erlaube in Automaten nicht nur **existenzielle** (= nichtdeterm.) „Verzweigungen“, sondern auch **universelle**.

Warum Alternierung?

- „Alternierung“ heißt also, dass ein Maschinenmodell (abwechselnd) existenzielle und universelle Entscheidungen treffen kann.
- Alternierende Varianten gibt es für alle Automatentypen aus dieser Vorlesung (auf endlichen oder unendlichen Objekten, Wörtern oder Bäumen) und für andere Maschinenmodelle (z. B. Turingmaschinen).
- Für alternierende Automaten ist Komplementierung besonders leicht zu erreichen.
- Wir beschränken uns im Folgenden auf ω-**Wort**automaten, also auf alternierende Büchi-Automaten.

Überblick

Und nun ...

Alternierung: Grundidee

- Nichtdeterministischer Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert eine Eingabe, wenn ein akzeptierender Run **existiert**.

  d. h.: falls $(q, a, q'),\ (q, a, q'') \in \Delta$, kann $\mathcal{A}$ in Situation (q, a) „entscheiden", wie der Run fortgesetzt wird.

  Mindestens eine dieser Entscheidungen muss zum Ziel führen.
- Alternierung erlaubt auch **universelle Entscheidungen**, in beliebiger Kombination mit existenziellen.
- „Beliebige Kombination" wird realisiert durch **positive Boolesche Formel**, d. h. aussagenlogische Formel ohne $\neg$.
- Statt eines Runs (Zustandsfolge) gibt es nun einen **Run-Baum,** der alle universellen Entscheidungen berücksichtigt.

Positive Boolesche Formeln

Definition 5.1 (Syntax)

Die Menge der **positiven Booleschen Formeln (PBFs)** über einer Menge X, geschrieben $\mathbf{B}^+(X)$, ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Jedes Element $x \in X$ ist eine PBF.
- Die Konstanten $0, 1$ sind PBFs.
- Wenn φ, ψ PBFs sind, dann auch $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$.

Definition 5.2 (Semantik)

Jede Menge $Y \subseteq X$ definiert eine **Belegung** $V_Y : X \to \{0, 1\}$:

$$V_Y(x) = 1, \text{ falls } x \in Y; \quad V_Y(x) = 0 \text{ sonst.}$$

Eine Menge $Y \subseteq X$ **erfüllt** eine PBF $\varphi \in \mathrm{B}^+(X)$, geschrieben $\boldsymbol{Y \models \varphi}$, wenn $V_Y \models \varphi$ (nach Standard-Semantik AL).

T 5.1

Alternierende Automaten

Definition 5.3

Ein **alternierender Büchi-Automat** auf ω-Wörtern **(ABA)** ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine **Alphabet** (endliche nichtleere Menge von Zeichen) ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathrm{B}^+(Q)$ die **Überführungsfunktion** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

Wir nehmen wieder o. B. d. A. $I = \{q_I\}$ an.

Alternative Akzeptanzbedingungen (Muller, Parität usw.) sind auch möglich.

Run-Bäume

Betrachten **Baum mit Verzweigungsgrad $\leq n$**, für festes $n \in \mathbb{N}$

- Positionen: Menge $P \subseteq \{1, \dots, n\}^*$, präfix-abgeschlossen
- **Kinder** eines Knotens p: **Kinder**$(p) \subseteq \{p1, \dots, pn\}$
- **Tiefe, Ebene, Nachfolger, Pfad:** wie gehabt

Pfad in P: endliche oder unendliche Folge $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\cdots$ von **Positionen** $\pi_i \in P$ mit

- $\pi_0 = \varepsilon$ und
- $\pi_{i+1} \in \text{Kinder}(\pi_i)$ für alle $i \geq 0$

Σ-Baum (P, t) (Alphabet Σ):

- P wie oben
- $t : P \to \Sigma$ ist Markierungsfunktion **T 5.2**

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 5.4

Ein **Run** eines ABA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, F)$ auf einem Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots \in \Sigma^\omega$ ist ein **Q-Baum** (P, r), so dass:

- $r(\varepsilon) = q_I$
- für alle $p \in P$: wenn $r(p) = q$, dann

$$\left\{r(p') \mid p' \in \text{Kinder}(p)\right\} \models \delta(q, \alpha_{|p|}) \,. \qquad \textbf{T 5.3}$$

Run (P, r) ist **erfolgreich**, wenn für **jeden unendlichen** Pfad $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\ldots$ in P gilt:

$$\text{Inf}(r, \pi) \cap F \neq \emptyset \qquad \textbf{T 5.3 Forts.}$$

$\boldsymbol{L_\omega(\mathcal{A})} = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ hat einen erfolgr. Run auf } \alpha\}$ **T 5.3 Forts.**

(für andere Akzeptanzbedingungen analog)

Und nun ...

Vorbetrachtungen

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\to$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi\, U\, \varphi$
mit $x \in \text{AV}$ (Aussagenvariablen)

$s, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

$F\varphi \equiv (x \vee \neg x)\, U\, \varphi$
$G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi$

Expansionsgesetz:
$s, i \models \varphi\, U\, \psi$ **gdw.** $s, i \models \psi$ oder $\big(s, i \models \varphi$ und $s, i{+}1 \models \varphi\, U\, \psi\big)$

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\sim\psi = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

cl$(\varphi) = \{\psi, \sim\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$

Bestandteile des ABA $\mathcal{A}_\varphi$

- Eingabealphabet: $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$ wie gehabt
- Zustände: für jede Formel $\psi \in \mathsf{cl}(\varphi)$ ein q_ψ; Startzustand q_φ
- Übergänge:
  - für $\wedge, \vee$: mittels PBF
  - für $\neg$: per „Negation" der PBF
  - für $X\psi$: schicke q_ψ zur nächsten Position
  - für U: per Expansionsgesetz
- F verhindert unendliches „Aufschieben" von U-Teilformeln!

„Negation von PBFs"

Idee: Nutzen stattdessen Dualität von $\wedge, \vee$ (de Morgan), um Negation nach innen zu ziehen.

Negation eines Atoms q_ψ ist dann $q_{\sim\psi}$.

Genauer: mittels Operator $\overline{}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \overline{\zeta_1 \wedge \zeta_2} &= \overline{\zeta_1} \vee \overline{\zeta_2} \\ \overline{\zeta_1 \vee \zeta_2} &= \overline{\zeta_1} \wedge \overline{\zeta_2} \\ \overline{q_\psi} &= q_{\sim\psi} \\ \overline{1} &= 0 \\ \overline{0} &= 1 \end{aligned}$$

Konstruktion des ABA

- $Q = \{q_\psi \mid \psi \in \mathsf{cl}(\varphi)\}, \quad q_I = q_\varphi$
- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathsf{B}^+(Q)$ wie folgt:

$$\delta(q_x, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(q_{\sim\psi}, a) &= \overline{\delta(q_\psi, a)} \\ \delta(q_{\psi\wedge\vartheta}, a) &= \delta(q_\psi, a) \wedge \delta(q_\vartheta, a) \\ \delta(q_{\psi\vee\vartheta}, a) &= \delta(q_\psi, a) \vee \delta(q_\vartheta, a) \\ \delta(q_{X\psi}, a) &= q_\psi \\ \delta(q_{\psi U\vartheta}, a) &= \delta(q_\vartheta, a) \vee (\delta(q_\psi, a) \wedge q_{\psi U\vartheta}) \end{aligned}$$

- $F = \{q_{\neg(\psi U \vartheta)} \mid \neg(\psi\ U\ \vartheta) \in \mathsf{cl}(\varphi)\}$ **T 5.4**

Vergleich mit Konstruktion LTL $\longrightarrow$ (G)NBA aus Teil 3

Auffällige Unterschiede

- ABA hat linear viele Zustände, GNBA exponentiell viele.
- Hier wird die Bedeutung **aller** Operatoren in δ kodiert.

Gemeinsamkeiten

- Beide Konstruktionen verwenden das Expansionsgesetz.
- Beide Akzeptanzbedingungen verfolgen denselben Zweck: verbieten, die Erfüllung von U-Formeln ∞ weit hinauszuzögern.

1. Punkt bedeutet natürlich, dass es zu einem ABA im Allg. keinen polynomiell großen äquivalenten NBA geben kann.

Und nun . . .

Abschluss unter Komplement

. . . ist für ABA-erkennbare Sprachen besonders leicht zu zeigen.

Für eine PBF φ definieren wir **dual(φ)**
als die PBF, die durch „Umdrehen“ von $\wedge$ und $\vee$ entsteht,
z. B.: $\mathrm{dual}((q_1 \wedge q_2) \vee q_3) = (q_1 \vee q_2) \wedge q_3$

Wir betrachten zur weiteren Erleichterung jetzt A**M**As
(alternierende **Muller**-Aut., Akzeptanzkomp. $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ wie gehabt)

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5
Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze
  $\delta'(q, a) = \mathrm{dual}(\delta(q, a))$.
- $\mathcal{F}' = 2^Q \setminus \mathcal{F}$ **T 5.5**

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$ (Beweis mittels Spielen) □

Insbesondere ist $\mathcal{A}'$ (bis auf $\mathcal{F}'$) nicht größer als $\mathcal{A}$!

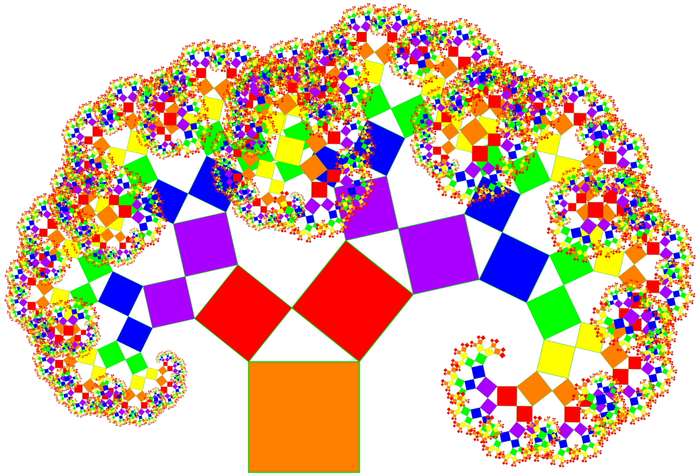
Alternierende vs. nichtdeterministische Automaten

Satz 5.6 (Miyano & Hayashi 1984)
Für jeden ABA $\mathcal{A}$ gibt es einen NBA $\mathcal{A}'$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}')$.

Alternierende und nichtdeterministische Büchi-Automaten sind also **gleichmächtig.**

Beweisskizze: Siehe Folien aus dem letzten Jahr
`http://tinyurl.com/ws1718-automaten`

Fast fertig für dieses Semester . . .



Pythagoras-Baum. Quelle: Wikipedia, User Gjacquenot (Lizenz CC BY-SA 3.0)

Danke für Eure Aufmerksamkeit!

Literatur für diesen Teil

Bernd Finkbeiner.
Automata, Games, and Verification.
Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SoSe 2015.
Kap. 8: Alternating Büchi Automata.
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/lecture-notes.html
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/downloads/notes.pdf