Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 4: endliche Automaten auf unendlichen Bäumen

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

Überblick

Computation Tree Logic (CTL)

- Grenzen von LTL: kann nicht über Pfade quantifizieren
- Berechnungsbäume und CTL
- Ausdrucksvermögen von LTL und CTL im Vergleich
- Model-Checking mit CTL

Büchi-Automaten auf unendlichen Bäumen

- Definitionen und Beispiele
- äquivalente Automatenmodelle: Muller-, Paritätsautomaten
- Abschlusseigenschaften;
  Komplementierung von Muller-Automaten ⚠

Überblick

Und nun ...

Erinnerung an LTL *(Linear Temporal Logic)*

- System gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$
- LTL-Formel φ_E beschreibt Pfade, die Eigenschaft E erfüllen
- Beispiel:
  „Wenn Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
  $G(e \to F\neg e)$ ($e \in$ AV steht für „Error")
- Umwandlung φ_E in GNBA $\mathcal{A}_E$, der zulässige Pfade beschreibt
- lösen damit Model-Checking-Problem:
  - Gilt E für *alle* Pfade ab S_0 in $\mathcal{S}$?
    (universelle Variante)
  - Gilt E für *mindestens einen* Pfad ab S_0 in $\mathcal{S}$?
    (existenzielle Variante)

LTL 1977 eingeführt durch Amir Pnueli, 1941-2009,
israelischer Informatiker (Haifa, Weizmann-Inst., Stanford, Tel Aviv, New York)

Grenzen von LTL

„LTL-Formel φ_E beschreibt Pfade, die Eigenschaft E erfüllen"

Nicht ausdrückbar: zu jedem Zeitpunkt ist es immer *möglich*, die Berechnung auf eine gewisse Weise fortzusetzen

Beispiel: „Wenn ein Fehler auftritt,
ist es *möglich*, ihn nach endlicher Zeit zu beheben."
$G(e \to F\neg e)$ oder $GF\neg e$ sind

- zu stark in Verbindung mit universellem Model-Checking **T 4.1**
- zu schwach in Verbindung mit existenziellem MC **T 4.1 Forts.**

Ein Fall für CTL *(Computation Tree Logic)*

Abhilfe: Betrachten Berechnungsbäume statt Pfaden

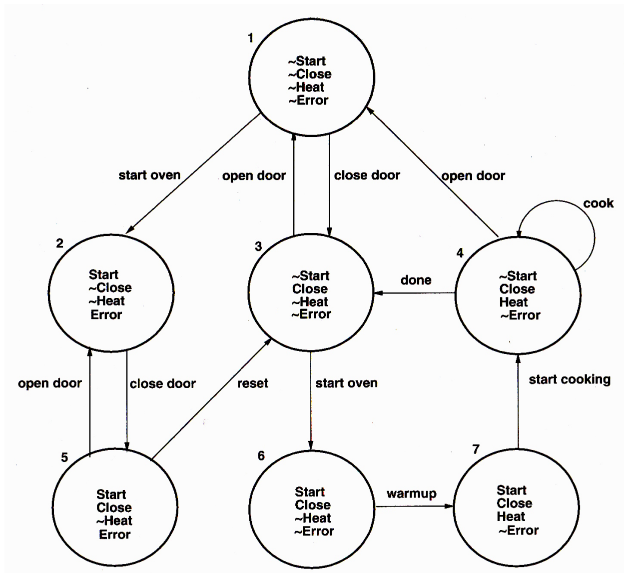
Sei also $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ eine Kripke-Struktur

Berechnungsbaum für $s_0 \in S_0$

- entsteht durch „Auffalten" von $\mathcal{S}$ in s_0
- enthält *alle unendlichen* Pfade, die in s_0 starten
  d. h.: jeder Zustand $s \in S$ hat als Kinder
  alle seine Nachfolgerzustände aus $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ ist eine endliche Repräsentation aller ∞ Berechnungsbäume

Beispielstruktur Mikrowelle



aus: E. M. Clarke et al., Model Checking, MIT Press 1999 **T 4.2**

CTL intuitiv

CTL enthält **Pfadquantoren *A*, *E***:

Operatoren, die über **alle** oder **einige** Berechnungen sprechen, die in einem bestimmten Zustand beginnen

Beispiel: $AGEF\neg e$

Für alle Berechnungen, die hier starten (A),
gibt es zu jedem Zeitpunkt in der Zukunft (G)
eine Möglichkeit, die Berechnung fortzusetzen (E),
so dass irgendwann in der Zukunft (F)
kein Fehler auftritt ($\neg e$)

CTL 1981 eingeführt durch
Edmund M. Clarke, *1945, Informatiker, Carnegie Mellon Univ. (Pittsburgh)
E. Allen Emerson, *1954, Informatiker, Univ. of Texas, Austin, USA
(beide Turing-Award-Träger 2007)

CTL exakt

Trennung von Zustands- und Pfadformeln:

Zustandsformeln drücken Eigenschaften eines Zustandes aus

$$\zeta ::= p \mid \zeta_1 \wedge \zeta_2 \mid \zeta_1 \vee \zeta_2 \mid \neg\zeta \mid E\psi \mid A\psi$$

(p: Aussagenvariable; ζ, ζ_1, ζ_2: Zustandsformeln; ψ: Pfadformel)

Pfadformeln drücken Eigenschaften eines Pfades aus

$$\psi ::= F\zeta \mid G\zeta \mid X\zeta \mid \zeta_1 \, U \, \zeta_2$$

(ζ, ζ_1, ζ_2: Zustandsformeln)

$\leadsto$ in **zulässigen** CTL-Formeln muss

- jeder Pfadquantor von einem temporalen Operator gefolgt werden
- jeder temporale Operator direkt einem Pfadquantor folgen

Quiz: zulässige Formeln

Zur Erinnerung:

$$(ZF) \quad \zeta ::= p \mid \zeta_1 \wedge \zeta_2 \mid \zeta_1 \vee \zeta_2 \mid \neg\zeta \mid E\psi \mid A\psi$$
$$(PF) \quad \psi ::= F\zeta \mid G\zeta \mid X\zeta \mid \zeta_1 \, U \, \zeta_2$$

Quizfrage: Welche der folgenden Formeln sind zulässig?

$p \wedge q \quad EFp \quad AXp$	✓	
$E(p \, U \, q)$	✓	
$A((p \vee \neg p) \, U \, q)$	✓	(äquivalent zu AFq)
$E(p \vee AXq)$	✘	(E nicht gefolgt von F, G, X, U)
$EX(p \vee AXq)$	✓	
$EF(p \, U \, q)$	✘	(U folgt nicht E oder A)
$EFA(p \, U \, q)$	✓	

CTL-Semantik

CTL-Formeln werden über **Zuständen und Pfaden** von Kripke-Strukturen $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ interpretiert

Schreibweisen

- $s \models \zeta$ für Zustände $s \in S$ und Zustandsformeln ζ
- $\pi \models \psi$ für Pfade π und Pfadformeln ψ

Hilfsbegriffe

- Paths(s): Menge aller Pfade, die in Zustand s beginnen
- $\pi[i]$: i-ter Zustand auf dem Pfad π
  d. h. wenn $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$, dann $\pi[i] = s_i$

CTL-Semantik

Sei $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ eine Kripke-Struktur.

Definition 4.1

Erfülltheit von Zustandsformeln in Zuständen $s \in S$

$s \models p$	falls	$p \in \ell(s)$, für alle $p \in$ AV
$s \models \neg\zeta$	falls	$s \not\models \zeta$
$s \models \zeta_1 \wedge \zeta_2$	falls	$s \models \zeta_1$ und $s \models \zeta_2$ (analog für $\zeta_1 \vee \zeta_2$)
$s \models E\psi$	falls	$\pi \models \psi$ für ein $\pi \in$ Paths(s)
$s \models A\psi$	falls	$\pi \models \psi$ für alle $\pi \in$ Paths(s)

Erfülltheit von Pfadformeln in Pfaden π in $\mathcal{S}$

$\pi \models X\zeta$	falls	$\pi[1] \models \zeta$ (analog für $F\zeta$ und $G\zeta$)
$\pi \models \zeta_1 \, U \, \zeta_2$	falls	$\pi[j] \models \zeta_2$ für ein $j \geqslant 0$ und $\pi[k] \models \zeta_1$ für alle k mit $0 \leqslant k < j$

Schreiben $\quad \mathcal{S} \models \zeta \quad$ falls $\quad s_0 \models \zeta$ für alle $s_0 \in S_0$

Zurück zu unseren Beispielen: Spezifikationen in CTL

Beispiel Nebenläufigkeit

- Beide Teilprogramme sind nie zugleich im kritischen Bereich.
  $AG\neg(p_{12} \wedge p_{22})$ ($p_i \in$ AV: „Programmzähler in Zeile i“)
- Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich.
  $AGAFp_{12} \wedge AGAFp_{22}$
- Jedes Teilprog. *kann* beliebig oft in seinen kB kommen.
  $AGEFp_{12} \wedge AGEFp_{22}$

Liveness properties:

$AG\zeta$ besagt: „ζ ist in allen Berechnungen immer wahr“

$AGAF\zeta$ besagt: „ζ ist in allen Berechnungen ∞ oft wahr“

$AGEF\zeta$ besagt: „jede begonnene Berechnung kann so fortgesetzt werden, dass ζ irgendwann wahr wird.“

Zurück zu unseren Beispielen: Spezifikationen in CTL

Beispiel Mikrowelle

- „Wenn Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“
  $AG(e \rightarrow AF\neg e)$ ($e \in$ AV steht für „Error“)
- „Wenn Fehler auftritt, *kann* er nach endl. Z. behoben werden“
  $AG(e \rightarrow EF\neg e)$
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, beginnt sie nach endlicher Zeit zu heizen.“
  $AG(s \rightarrow AFh)$ ($s, h \in$ AV stehen für „Start“ bzw. „Heat“)
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, *ist es möglich*, dass sie nach endlicher Zeit zu heizen beginnt.“
  $AG(s \rightarrow EFh)$

Progress properties: $AG(\zeta_1 \rightarrow AF\zeta_2)$, $AG(\zeta_1 \rightarrow EF\zeta_2)$ bedeuten:
Wann immer ζ_1 eintritt, ist nach endlicher Zeit ζ_2 „garantiert“

Ausdrucksstärke von CTL versus LTL

Definition 4.2

Seien ζ eine CTL-Zustandsformel und φ eine LTL-Formel.

ζ und φ sind **äquivalent**, geschrieben $\boldsymbol{\zeta \equiv \varphi}$, wenn für alle Kripke-Strukturen $\mathcal{S} = (S, S_0, R, \ell)$ gilt:

$$\mathcal{S} \models \zeta \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{S} \models \varphi$$

Zur Erinnerung:

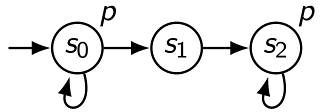
- $\mathcal{S} \models \zeta$, wenn $s_0 \models \zeta$ für **alle** $s_0 \in S_0$
- $\mathcal{S} \models \varphi$, wenn $\pi, 0 \models \varphi$ für **alle** $\pi \in$ Paths(s_0) und **alle** $s_0 \in S_0$

Ausdrucksstärke von CTL versus LTL

Lemma 4.3

$AFAGp \not\equiv FGp$

Beweis. Betrachte Kripke-Struktur $\mathcal{S}$:



- alle Pfade $\pi \in \text{Paths}(s_0)$ erfüllen FGp
- aber $\mathcal{S} \not\models AFAGp$:

$$\begin{array}{lll} & s_0 s_1 s_2^\omega \not\models Gp & \text{wegen } p \notin \ell(s_1) \\ \Rightarrow & s_0 \not\models AGp & \text{weil } s_0 s_1 s_2^\omega \in \text{Paths}(s_0) \\ \Rightarrow & s_0^\omega \not\models FAGp & \text{weil } s_0^\omega \text{ nur aus } s_0 \text{ besteht} \\ \Rightarrow & s_0 \not\models AFAGp & \text{weil } s_0^\omega \in \text{Paths}(s_0) \end{array}$$

□

Ausdrucksstärke von CTL versus LTL

Lemma 4.4

Sei ζ eine CTL-Zustandsformel und ζ' die LTL-Formel, die man durch Entfernen aller Pfadquantoren aus ζ erhält. Dann gilt:

$\zeta \equiv \zeta'$ oder es gibt keine zu ζ äquivalente LTL-Formel.

Ohne Beweis. (Clarke, Draghicescu 1988)

Lemma 4.5

(1) Es gibt keine zu $AFAGp$ äquivalente LTL-Formel.

(2) Es gibt keine zu FGp äquivalente CTL-Zustandsformel.

Beweis.

(1) folgt aus Lemmas 4.3 und 4.4

(2) siehe Tafel **T 4.3** □

Ausdrucksstärke von CTL versus LTL

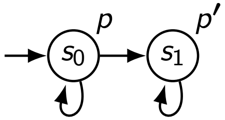
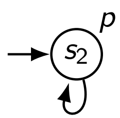
Auch **progress properties** sind **nicht** in LTL ausdrückbar:

Lemma 4.6

Sei $\zeta = AG(p \to EFp')$. Es gibt keine zu ζ äquivalente LTL-Formel.

Beweis. Angenommen, es gebe LTL-Formel $\varphi \equiv \zeta$.

Betrachte Kripke-Strukturen

$\mathcal{S}_1$  $\mathcal{S}_2$ 

Dann gilt $\mathcal{S}_1 \models \zeta$.

Also auch $\mathcal{S}_1 \models \varphi$.

Da $\text{Paths}(s_2) \subseteq \text{Paths}(s_0)$, gilt auch $\mathcal{S}_2 \models \varphi$.

Aber offensichtlich $\mathcal{S}_2 \not\models \zeta$. ↯ □

Ausdrucksstärke von CTL versus LTL

Erweiterung von LTL und CTL: **CTL***

CTL*: 1986 von E. A. Emerson und J. Y. Halpern (*1953, Inform., Cornell)

Model-Checking für CTL (Skizze)

Standard-Algorithmus („bottom-up labelling“, ohne Automaten):

Eingabe: Kripke-Str. $\mathcal{S}$, Zust. s_0, CTL-Zustandsformel ζ
Frage: $s_0 \models \zeta$?

Vorgehen:

- Stelle ζ als Baum dar (Bsp. siehe Tafel) **T 4.4**
- Gehe Baum von unten nach oben durch und markiere Zustände s in $\mathcal{S}$ mit der jeweiligen Teilformel, wenn sie in s erfüllt ist **T 4.4 Forts.**
- Akzeptiere gdw. s_0 mit ζ markiert ist

Komplexität: **P**-vollständig (LTL-MC: **PSpace**-vollständig)

Dafür ist CTL-SAT **ExpTime**-vollständig (LTL-SAT: **PSpace**-vollst.).

Model-Checking für CTL mit Baumautomaten

Automatenbasierte Entscheidungsprozedur für CTL

... basiert auf **alternierenden Baumautomaten**

(Erweiterung des Begriffs der nichtdeterminist. Baumautomaten; siehe Teil 5 der Vorlesung)

Verwandt:

Automatenbasierte Entscheidungsprozedur für CTL*-**Erfüllbarkeit**

- basiert auf nichtdeterministischen Rabin-Baumautomaten
- technisch aufwändige Konstruktion
- hier nicht behandelt

Es folgt:

Überblick „klassische“ nichtdeterministische Baumautomaten

Und nun ...

Baumautomaten: Grundbegriffe

Betrachten **unendlichen vollständigen Binärbaum**

- Positionen: *alle* Wörter aus $\{0,1\}^*$
- jeder Knoten p hat linkes und rechtes Kind: $p0, p1$
- **Tiefe** von Knoten p: $|p|$
- **Ebene** k: alle Knoten der Tiefe k
- p_2 ist **Nachfolger** von p_1, geschrieben $p_1 \sqsubseteq p_2$, wenn $p_2 = p_1 p$ für ein $p \in \{0,1\}^*$ **T 4.5**

Pfad: Teilmenge $\pi \subseteq \{0,1\}^*$ mit $\varepsilon \in \pi$ und:

- wenn $p \in \pi$, dann genau eins der Kinder $p0, p1$ in π
- $\forall k$: von allen Knoten der Ebene k ist genau einer in π **T 4.5 Forts.**

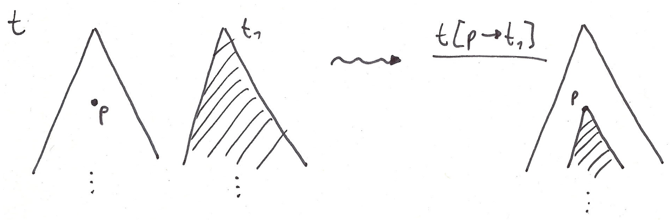
Σ-Baum t (Alphabet Σ ohne Stelligkeit):

Funktion $t : \{0,1\}^* \to \Sigma$ **T 4.5 Forts.**

Baumautomaten: etwas mehr Notation (1)

$\hat{t} = t[p \to t_1]$:
der Baum, den man aus t erhält, wenn man den Teilbaum, der in p wurzelt, durch t_1 ersetzt

Skizze:



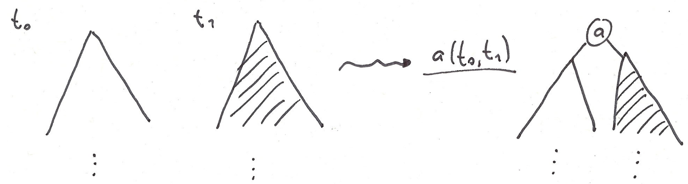
exakte Beschreibung:

$$\hat{t}(p') = \begin{cases} t_1(p'') & \text{wenn } p' = pp'' \\ t(p') & \text{wenn } p \not\sqsubseteq p' \end{cases}$$

Baumautomaten: etwas mehr Notation (2)

$\hat{t} = a(t_0, t_1)$:
der Baum mit Wurzel a und Teilbäumen t_0, t_1 in den Wurzelkindern $0, 1$:

Skizze:



exakte Beschreibung:

$$\hat{t}(p) = \begin{cases} a & \text{wenn } p = \varepsilon \\ t_0(p') & \text{wenn } p = 0p' \\ t_1(p') & \text{wenn } p = 1p' \end{cases}$$

Baumautomaten: Definition

Definition 4.7

Ein **nichtdeterministischer Büchi-Baumautomat (NBBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q \times Q$ die **Überführungsrelation** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

(entsprechen offenbar Top-down-Automaten)

Muller- und Paritäts-Baumautomaten

Definition 4.8

Ein **nichtdeterministischer Muller-Baumautomat (NMBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$, wobei

- Q, Σ, Δ, I wie für NBBAs sind
- $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ die **Akzeptanzkomponente** ist

Ein **nichtdeterministischer Paritäts-Baumautomat (NPBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, c)$, wobei

- Q, Σ, Δ, I wie für NBBAs sind
- $c : Q \to \mathbb{N}$ die **Akzeptanzkomponente** ist

(Rabin- und Streett-Baumautomaten wie üblich definiert)

Runs auf Baumautomaten

Run = Markierung der Positionen in $\{0,1\}^*$ mit Zuständen, verträglich mit Anfangszuständen und Überführungsrelation

Definition 4.9

Ein **Run** eines NBBA (NMBA, NPBA) $\mathcal{A}$ auf einem Σ-Baum t ist eine Funktion $r : \{0,1\}^* \to Q$, so dass

- $r(\varepsilon) \in I$;
- für alle $p \in \{0,1\}^*$ gilt: $(r(p), t(p), r(p0), r(p1)) \in \Delta$

Erfolgreicher Run: verträglich mit Akzeptanzkomponente

Erfolgreiche Runs

Sei r Run eines NxBAs $\mathcal{A}$ und π ein Pfad

Betrachten wieder **Unendlichkeitsmenge**

$$\mathrm{Inf}(r,\pi) = \{q \in Q \mid r(p) = q \text{ für unendlich viele } p \in \pi\}$$

Definition 4.10

- Run r des NBBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ist **erfolgreich**, falls **für alle Pfade** π gilt: $\mathrm{Inf}(r,\pi) \cap F \neq \emptyset$
- Run r des NMBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ist **erfolgreich**, falls **für alle Pfade** π gilt: $\mathrm{Inf}(r,\pi) \in \mathcal{F}$
- Run r des NPBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, c)$ ist **erfolgreich**, falls **für alle Pfade** π gilt: $\min\{c(q) \mid q \in \mathrm{Inf}(r,\pi)\}$ ist gerade

Akzeptanz und erkannte Sprache

... sind wie üblich definiert:

Definition 4.11

Sei $\mathcal{A}$ ein NBBA, NMBA oder NPBA, sei t ein Σ-Baum und L eine Menge von Σ-Bäumen.

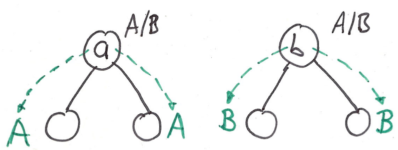
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** t, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf t gibt.
- $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } t\}$
- L heißt **Büchi-erkennbar**, wenn es einen NBBA $\mathcal{A}$ gibt mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L$.
- Analog: **Muller-erkennbar** und **paritäts-erkennbar**

Beispiele (Büchi)

- NBBA $\mathcal{A} = (\{A,B\},\ \{a,b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{A\})$ mit

  $\Delta = \{\ (A,a,A,A),\ (B,a,A,A),\ (A,b,B,B),\ (B,b,B,B)\ \}$

  Skizze:



  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat } \infty \text{ viele } a\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{B\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat } \infty \text{ viele } b\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{A, B\}$

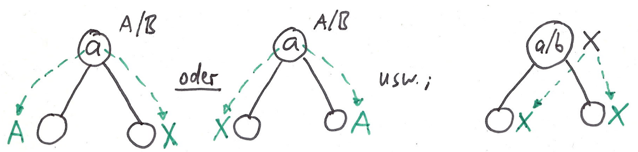
  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t \text{ ist ein } \Sigma\text{-Baum}\}$

Beispiele (Büchi)

- NBBA $\mathcal{A} = (\{A, B, X\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{A, X\})$ mit $\Delta =$

  $\{\ (A, a, A, X),\ (B, a, A, X),\ (A, b, B, X),\ (B, b, B, X),\ (X, a, X, X),$
  $(A, a, X, A),\ (B, a, X, A),\ (A, b, X, B),\ (B, b, X, B),\ (X, b, X, X)\ \}$

  Skizze:



  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t$ hat mind. einen Pfad mit ∞ vielen a's$\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{B, X\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t$ hat mind. einen Pfad mit ∞ vielen b's$\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{X\}$: $\quad L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$

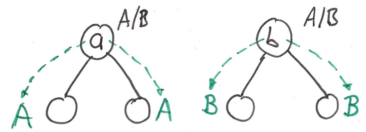
- derselbe NBBA, aber mit $F = \{A, B\}$

Beispiele (Muller)

- NMBA $\mathcal{A} = (\{A, B\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{\{A\}\})$ mit

  $\Delta = \{\ (A, a, A, A),\ (B, a, A, A),\ (A, b, B, B),\ (B, b, B, B)\ \}$

  Skizze:



  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid$ jeder Pfad hat endlich viele b's$\}$ (!)

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid$ jeder Pfad hat endlich viele a's$\}$

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{A, B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid$ jeder Pfad hat ∞ viele a's und ∞ viele b's$\}$

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{A\}, \{B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid$ jeder Pfad hat endl. viele b's *oder* endl. viele a's$\}$

Beispiel (Parität)

Zur Erinnerung:

Run r ist erfolgreich, wenn für alle Pfade $\pi \subseteq T$ gilt:

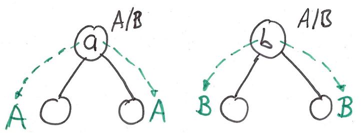
$$\min\{c(q) \mid q \in \mathsf{Inf}(r, \pi)\} \text{ ist gerade}$$

NPBA $\mathcal{A} = (\{A, B\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ c)$ mit

$$\Delta = \{\ (A, a, A, A),\ (B, a, A, A),\ (A, b, B, B),\ (B, b, B, B)\ \}$$

$c(A) = 1$

$c(B) = 2$



$L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid$ jeder Pfad hat endlich viele a's$\}$

Büchi- versus Muller-Erkennbarkeit

Satz 4.12

1. Jede Büchi-erkennbare Sprache ist Muller-erkennbar.
2. **Nicht jede** Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

1. Wie im letzten Kapitel.
2. Betrachten $L = \{t \mid$ jeder Pfad in t hat endlich viele a's$\}$

   L ist Muller-erkennbar (siehe Bsp. auf Folie 34)

   Müssen zeigen: L nicht Büchi-erkennbar

Büchi- versus Muller-Erkennbarkeit

Zu zeigen: $L = \{t \mid \text{jeder Pfad in } t \text{ hat endlich viele } a\text{'s}\}$
nicht Büchi-erkennbar.

Nehmen an, es gebe NBBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L$.

O. B. d. A. sei $I = \{q_0\}$. Sei $n := |F|$.

Idee:

- Bestimme Baum $t \in L$ mit Run r und Pfad, auf dem zwischen 2 Besuchen *desselben* akzeptierenden Zustandes ein a auftritt
- „Pumpe“ t, r so auf, dass dieser Teilpfad sich ∞ oft wiederholt
- ↯ Neuer Baum wird akzeptiert, aber neuer Pfad hat ∞ viele a's

Büchi- versus Muller-Erkennbarkeit

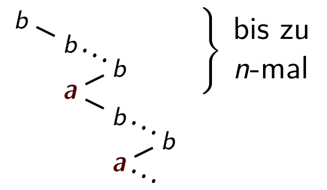
Betrachte Baum $t \in L$ mit $t(p) = a$ gdw. $p \in \bigcup_{i=1,\dots,n} (1^+0)^i$,

d. h. t enthält ein a an allen Positionen, die man erreicht, wenn man bei der Wurzel startet und bis zu n-mal wie folgt läuft:

- einmal oder mehrmals zum rechten Kind (beliebig oft)
- einmal zum linken Kind („Linksschritt“)

An den übrigen Positionen enthält t ein b.

Skizze:



Klar: $t \in L$. Sei r ein erfolgreicher Run.

Details des Pumpens: s. Tafel **T 4.6** □

Folgerung aus dem Beweis von Satz 4.12

Folgerung 4.13

Die Klasse der Büchi-erkennbaren Baumsprachen ist **nicht** abgeschlossen unter Komplement.

Man kann Satz 4.12 stärker formulieren (ohne Beweis):

Satz 4.14

Die Menge der Baumsprachen, die Muller-, aber nicht Büchi-erkennbar sind, ist

$$\{L_\triangle \mid L \text{ ist NBA-erkennbar, aber nicht DBA-erkennbar}\}.$$

($L \subseteq \Sigma^\omega$ ist eine ω-Sprache;
$L_\triangle$ = Menge aller Σ-Bäume, deren Beschriftung entlang *jedes* Pfades in L liegt)

Paritäts- versus Muller-Erkennbarkeit

Satz 4.15

1. Jede paritäts-erkennbare Sprache ist Muller-erkennbar.
2. Jede Muller-erkennbare Sprache ist paritäts-erkennbar.

Beweis.

1. Wie im letzten Kapitel.
2. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ NMBA, mit $I = \{q_0\}$ und $\mathcal{F} = \{F\}$ (o. B. d. A.) sowie $n := |Q|$.

   Gesucht: äquivalenter NPBA $\mathcal{A}'$

   Idee: $\mathcal{A}'$ soll ...

   - „sich merken“, in welcher Reihenfolge die n Zustände zuletzt gesehen wurden (Permutation $q_1 \cdots q_n$ von Q)
   - sicherstellen, dass ab einem gewissen Zeitpunkt genau die Zustände aus F dauerhaft am Ende der Permutation stehen

Details der Konstruktion (1)

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_0\}, F)$ NMBA mit $|Q| = n$.
Konstruieren NPBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', c)$ mit Zuständen

$$Q' = \{\langle q_1 \cdots q_n,\ \ell\rangle \mid q_1 \cdots q_n \text{ ist Permutation von } Q,\ \ell \in \{1, \dots, n\}\}$$

Idee:

- q_n ist der zuletzt besuchte Zustand auf dem aktuellen Pfad, q_{n-1} der zuletzt besuchte Zustand $\neq q_n$ usw.
- ℓ ist Position von q_n in der vorangehenden Permutation

Skizze: siehe Tafel **T 4.7**

Details der Konstruktion (2)

Zeigen zunächst folgende **Hilfsaussage (HA)** über Zustände von $\mathcal{A}'$

Sei $q_1 q_2 q_3 \dots$ eine Folge von Zuständen aus Q;
sei $s_1 s_2 s_3 \dots$ die zugehörige Folge von Zuständen aus Q'
mit $s_1 = \langle t_1 \cdots t_{n-1} q_1,\ 1\rangle$ und $s_i = \langle \text{perm}_i, \ell_i\rangle$ für alle $i \geqslant 0$.

Dann gilt $\text{Inf}(q_1 q_2 q_3 \dots) = S$ mit $|S| = k$ gdw.

1. Für endlich viele i ist $\ell_i \leqslant n - k$ und
2. Für unendlich viele i gilt:
   (a) $\ell_i = n - k + 1$ und
   (b) Die Menge der Zustände in den Positionen $\underbrace{n - k + 1, \dots, n}_{\text{letzte } k \text{ Positionen}}$ in perm_i ist S

Beweis der Hilfsaussage: siehe Tafel **T 4.8**

Details der Konstruktion (3)

Können nun Konstruktion fortsetzen:

$$I' = \Big\{\langle t_1 \cdots t_{n-1} q_0,\ 1\rangle \mid t_1 \cdots t_{n-1} \text{ ist Perm. von } Q \setminus \{q_0\}\Big\}$$

$$\Delta' = \Big\{\Big(\langle i_1 \cdots i_{n-1} i,\ \ell\rangle,\ a,\ \langle i'_1 \cdots i'_{n-1} i',\ \ell'\rangle,\ \langle i''_1 \cdots i''_{n-1} i'',\ \ell''\rangle\Big) \mid$$

- $(i, a, i', i'') \in \Delta$
- $i'_1 \cdots i'_{n-1}$ entsteht aus $i_1 \cdots i_{n-1} i$ durch Löschen von i'
- $i''_1 \cdots i''_{n-1}$ entsteht aus $i_1 \cdots i_{n-1} i$ durch Löschen von i''
- ℓ' = Position von i' in $i_1 \cdots i_{n-1} i$
- ℓ'' = Position von i'' in $i_1 \cdots i_{n-1} i$ $\Big\}$

$$c(s) = \begin{cases} 2\ell & \text{falls } s = \langle q_1 \cdots q_n,\ \ell\rangle \text{ und } \{q_\ell, \dots, q_n\} = F \\ 2\ell + 1 & \text{falls } s = \langle q_1 \cdots q_n,\ \ell\rangle \text{ und } \{q_\ell, \dots, q_n\} \neq F \end{cases}$$

Beweis der Korrektheit: siehe Tafel **T 4.9** □

Abschlusseigenschaften

Satz 4.16

Die Klasse der ...

1. Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter $\cup$ und $\cap$, aber nicht unter $^-$.
2. Muller-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter $\cup, \cap, ^-$.

Beweis:

1. $\cup \cap$ wie gehabt; $^-$ siehe Folgerung 4.13.
2. $\cup \cap$ wie gehabt;
   $^-$ siehe nächsten Abschnitt □

Und nun ...

Überblick

Ziel dieses Abschnitts:

Lösen Komplementierung mit Hilfe eines bekannten Resultates über Gewinnstrategien in einer bestimmten Art (abstrakter) Spiele

Vorgehen:

- Ordnen jedem NPBA $\mathcal{A}$ und Baum t ein 2-Personen-Spiel $G_{\mathcal{A},t}$ zu (Beschränkung auf NPBAs ist unerheblich, siehe Satz 4.15)
- Dann wird leicht zu sehen sein:
  $\mathcal{A}$ akzeptiert $t \Leftrightarrow$ Spielerin 1 hat Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{A},t}$
- Ein Resultat aus der Spieltheorie impliziert:
  In $G_{\mathcal{A},t}$ hat immer **genau eine Spielerin eine Gewinnstrategie, die nicht vom bisherigen Spielverlauf abhängt**
- Konstruieren $\mathcal{A}'$, so dass gilt:
  $\mathcal{A}'$ akzeptiert $t \Leftrightarrow$ **Spielerin 2 hat Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{A},t}$**
  Dann folgt $L_\omega(\mathcal{A}') = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$

Intuitive Beschreibung des Spiels $G_{\mathcal{A},t}$

Zwei Spielerinnen **Aut** (Automat), **PF** (Pfadfinderin)

- sind abwechselnd an der Reihe
- bewegen sich pro Runde 1 Schritt im Baum durch Markieren von Positionen mit Zuständen; zu Beginn: (ε, q_I), $q_I \in I$

In jeder Runde wählt

- **Aut** eine Transition, die auf die markierte Position anwendbar ist
- **PF** einen Kindknoten und verschiebt Markierung dorthin

Spiel läuft ∞ lange, erzeugt ∞ Folge $r = q_0 q_1 q_2$ von Zuständen (bestimmt durch die gewählten Transitionen)

Aut gewinnt, wenn r der Akzeptanzbedingung von $\mathcal{A}$ entspricht; sonst gewinnt **PF**
(d. h. **Aut** versucht, $\mathcal{A}$ zum Akzeptieren zu bringen; **PF** versucht das zu verhindern)

Skizze: s. Tafel **T 4.10**

Genaue Beschreibung des Spiels $G_{\mathcal{A},t}$

Spiel ist ein unendlicher Graph

- Knoten sind die **Spielpositionen**:
  - für **Aut**: $\{(p, q) \mid p \in \{0,1\}^*,\ q \in Q\}$ (Positionen im Baum)
  - für **PF**: $\{(q, t(p), q_0, q_1) \in \Delta \mid p \in \{0,1\}^*\}$ (Transitionen)
- Kanten sind die möglichen **Spielzüge**:
  - $(p, q) \to (q, t(p), q_0, q_1)$
  - $(q, t(p), q_0, q_1) \to (p0, q_0)$ und $\searrow (p1, q_1)$
- Startknoten: (ε, q_I) für $q_I \in I$ (o. B. d. A. $I = \{q_I\}$)

Jede mögliche ∞ Folge von Spielzügen entspricht einem ∞ Pfad im Spielbaum $G_{\mathcal{A},t}$

Knoten v' **erreichbar** von Knoten v:
es gibt endliche Folge von Spielzügen von v nach v'

Spielstrategien

Strategie ab Spielposition v für Spielerin $X \in \{\textbf{Aut}, \textbf{PF}\}$:

Funktion, die jeder Zugfolge $v \dots v'$ mit v' Spielposition für X einen in v' möglichen Zug zuweist
(legt fest, welchen Zug X in jeder von v aus erreichbaren Spielposition macht)

Gewinnstrategie für Spielerin $X \in \{\textbf{Aut}, \textbf{PF}\}$:

Strategie, die sicherstellt, dass X gewinnt,
unabhängig von den Zügen der Gegenspielerin **T 4.11**

gedächtnislose Strategie:

Strategie, die nur von v' abhängt, nicht von den vorigen Positionen

Akzeptanz mittels Gewinnstrategien

Lemma 4.17

Seien $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_I\}, c)$ ein NPBA und t ein Σ-Baum.
Dann gilt:

$t \in L_\omega(\mathcal{A}) \iff$ **Aut** hat Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{A},t}$ ab Position (ε, q_I)

Beweis:

Konstruiere Gewinnstrategie direkt aus einem erfolgreichen Run und umgekehrt

Akzeptanz mittels Gewinnstrategien

„$t \in L_\omega(\mathcal{A}) \Rightarrow$ Aut hat Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{A},t}$ ab Position (ε, q_I)“

Gelte $t \in L_\omega(\mathcal{A})$ und sei r akzeptierender Run von $\mathcal{A}$ auf t.
Konstruiere Gewinnstrategie für **Aut** wie folgt aus r.

- in Startposition (ε, q_I) wähle $(r(\varepsilon), t(\varepsilon), r(0), r(1))$
- in allen anderen Spielpos. (p, q) wähle $(q, t(p), r(p0), r(p1))$

Wenn **Aut** diese Strategie befolgt, dann entspricht die im Spiel erzeugte Zustandsmenge einem Pfad in r.

Da r akzeptierend, gewinnt **Aut** nach Definition von $G_{\mathcal{A},t}$.

„Aut hat Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{A},t}$ ab Position $(\varepsilon, q_I) \Rightarrow t \in L_\omega(\mathcal{A})$“

T 4.12 □

Determiniertheit von Paritätsspielen

Klassisches Resultat aus der Spieltheorie, hier nicht bewiesen:

Satz 4.18 (Emerson & Jutla 1991, Mostowski 1991)

Alle Paritätsspiele sind **gedächtnislos determiniert**:
genau eine der Spielerinnen hat eine gedächtnislose Gewinnstrategie.

„Paritätsspiel“ bezeichnet dabei 2-Personen-Spiele, die

- auf Graphen gespielt werden,
  deren Knoten mit natürlichen Zahlen markiert sind;
- als Gewinnbedingung für unendliche Spielverläufe
  die Paritätsbedingung verwenden.

Für alle $\mathcal{A}$ und t ist $G_{\mathcal{A},t}$ ein Paritätsspiel.

Determiniertheit von Paritätsspielen

Folgerung aus Satz 4.18:

Folgerung 4.19

Seien $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_I\}, c)$ ein NPBA und t ein Σ-Baum.
Dann gibt es für jede Spielposition v in $G_{\mathcal{A},t}$ — und insbesondere für (ε, q_I) — eine gedächtnislose Gewinnstrategie für **Aut** oder **PF**.

Folgerung 4.20 (aus Lemma 4.17 und Folgerung 4.19)

$t \in \overline{L_\omega(\mathcal{A})} \iff$ **PF** hat gedächtnislose GS ab (ε, q_I) in $G_{\mathcal{A},t}$

Ziel: konstruieren NPBA, um deren Existenz zu testen

Gewinnbäume

Betrachten gedächtnislose Gewinnstrategien für **PF** als Menge von Funktionen

$$f_p : \Delta \to \{0,1\} \qquad \text{für jede Baumposition } p \in \{0,1\}^*$$

Idee: f_p weist jeder Transition, die **Aut** in Baumposition p wählt, einen Spielzug (Richtung 0/1) zu

- Sei F die Menge dieser Funktionen
- Ordnen die f_p in einem ***F*-Baum** s an (Strategiebaum)

PF-Gewinnbaum für t:
ein F-Baum, der eine Gewinnstrategie für **PF** in $G_{\mathcal{A},t}$ kodiert

Folgerung 4.21 (aus Folgerung 4.20)

$t \in \overline{L_\omega(\mathcal{A})} \iff$ es gibt einen **PF**-Gewinnbaum für t

Neues Ziel: bauen NPBA, um Existenz **PF**-Gewinnbaum zu testen

Existenz von PF-Gewinnbäumen (PF-GB)

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_I\}, c)$ ein NPBA und t ein Σ-Baum
Zwischenziel: Prüfen, ob gegebener F-Baum s **kein PF**-GB ist

Idee:

- Benutzen NPA $\mathcal{A}'$ **(ω-Wortautomat)**
- $\mathcal{A}'$ prüft für jeden Pfad π in t und jeden möglichen Spielzug von **Aut** separat, ob Akzeptanzbedingung von $\mathcal{A}$ erfüllt ist

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}'$ akzeptiert $\geqslant 1$ Pfad $\iff$ s ist kein **PF**-Gewinnbaum für t

Sei $\pi \in \{0,1\}^\omega$ ein Pfad mit $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\ldots$
$\mathcal{A}'$ arbeitet auf Wörtern der folgenden Form:

$$\big\langle s(\varepsilon), t(\varepsilon), \pi_1 \big\rangle \ \big\langle s(\pi_1), t(\pi_1), \pi_2 \big\rangle \ \big\langle s(\pi_1\pi_2), t(\pi_1\pi_2), \pi_3 \big\rangle \ \ldots$$

Sei $L_{s,t}$ die Sprache aller dieser Wörter

Beispiel: s. Tafel **T 4.13**

Konstruktion des Wortautomaten für Gewinnbäume

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_I\}, c)$ ein NPBA und t ein Σ-Baum
Konstruieren NPA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma', \Delta', \{q_I\}, c)$ wie folgt:

- $\Sigma' = \Big\{ \langle f, a, i \rangle \;\Big|\; f \in F,\ a \in \Sigma,\ i \in \{0,1\} \Big\}$
- Q, c wie in $\mathcal{A}$ (wollen Akzeptanz von $\mathcal{A}$ prüfen)
- $\Delta' = \Big\{ \big(q,\ \langle f, a, i \rangle,\ q'_i\big) \;\Big|\; \langle f, a, i \rangle \in \Sigma',\ i \in \{0,1\},$ es gibt $\delta = (q, a, q'_0, q'_1) \in \Delta$ mit $f(\delta) = i \Big\}$

$\mathcal{A}'$ prüft für *jeden möglichen* Zug von **Aut**, ob **Aut** gewinnen kann

Lemma 4.22

s ist ein **PF**-Gewinnbaum für $t \iff L_{s,t} \cap L_\omega(\mathcal{A}') = \emptyset$

Beweis: s. Tafel **T 4.14** □

Konstruktion des Komplementautomaten für $\mathcal{A}$

Gesucht: (siehe Folgerung 4.21)
NPBA $\mathcal{B}$, der t akzeptiert gdw. es einen **PF**-Gewinnbaum für t gibt

Wegen Lemma 4.22 muss $\mathcal{B}$ akzeptieren gdw. $L_{s,t} \subseteq \overline{L_\omega(\mathcal{A}')}$

Konstruktion von $\mathcal{B}$ in 2 Schritten:

Schritt 1

- Sei $\mathcal{A}'' = (Q'', \Sigma', \Delta'', q''_I, c'')$ der **D**PA mit $L_\omega(\mathcal{A}'') = \overline{L_\omega(\mathcal{A}')}$
- $\mathcal{A}''$ ist **deterministisch:** Safra-Konstruktion
  (+ Umwandlung zwischen den Automatentypen)

Schritt 2

$\mathcal{B}$ soll auf jedem Pfad von t

- $\mathcal{A}''$ laufen lassen
- und „parallel“ dazu eine Strategie für **PF** raten

Konstruktion des Komplementautomaten für $\mathcal{A}$

Idee: NPBA $\mathcal{B}$ soll $\mathcal{A}''$ auf **jedem** Pfad simulieren, indem $\mathcal{B}$

- s rät (also pro Position p ein f_p)
- sich ansonsten wie $\mathcal{A}''$ verhält,
  (also pro Position die Folgezustände q_0, q_1 gemäß Δ'' setzt)

$\mathcal{A}''$ deterministisch $\Rightarrow$ Zustand pro Position p eindeutig bestimmt

Konstruktion von $\mathcal{B} = (Q'', \Sigma, \Delta^{\text{neu}}, q''_I, c'')$:

- Q'', q''_I, c'' werden von $\mathcal{A}''$ übernommen
- $\Delta^{\text{neu}} = \Big\{(q, a, q_0, q_1) \;\Big|\; \text{es gibt } f \in F \text{ mit } \big(q, \langle f, a, i\rangle, q_i\big) \in \Delta'' \text{ für } i = 0, 1\Big\}$

Lemma 4.23

$t \in L_\omega(\mathcal{B})$ gdw. es gibt F-Baum s mit $L_{s,t} \subseteq L_\omega(\mathcal{A}'')$

Beweis: siehe Tafel **T 4.15** □

... Es darf aufgeatmet werden ... ☺

Das Resultat

Satz 4.24 (Rabin 1969)

Für jeden NPBA $\mathcal{A}$ gibt es einen NPBA $\mathcal{B}$ mit $L_\omega(\mathcal{B}) = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$.

Beweis:

Für den bisher konstruierten NPBA $\mathcal{B}$ gilt:

$t \in L_\omega(\mathcal{B})$	gdw.	$\exists s\,.\, L_{s,t} \subseteq L_\omega(\mathcal{A}'')$	(Lemma 4.23)
	gdw.	$\exists s\,.\, L_{s,t} \subseteq \overline{L_\omega(\mathcal{A}')}$	(Konstr. $\mathcal{A}''$)
	gdw.	$\exists s\,.\, L_{s,t} \cap L_\omega(\mathcal{A}') = \emptyset$	(Mengenlehre)
	gdw.	$\exists$ **PF**-Gewinnbaum s für t	(Lemma 4.22)
	gdw.	$t \in \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$	(Folg. 4.21)

□

Bemerkungen zur Komplexität der Konstruktion

Sei $n = |Q|$ (Anzahl der Zustände des NBPA $\mathcal{A}$).
Dann hat der NPA $\mathcal{A}'$ dieselben n Zustände.
DPA $\mathcal{A}''$ kann so konstruiert werden, dass $|Q''| \in O(2^{n \log n})$.
$\rightsquigarrow$ NBPA $\mathcal{B}$ hat $O(2^{n \log n})$ Zustände.

Literatur für diesen Teil (Basis, 1)

- E. Grädel, W. Thomas, T. Wilke (Hrsg.).
  Automata, Logics, and Infinite Games.
  LNCS 2500, Springer, 2002, S. 43–60.
  Kapitel 6–9 über Paritätsspiele und Baumautomaten.
  `http://www.cs.tau.ac.il/~rabinoa/Lncs2500.zip`
  Auch erhältlich auf Anfrage in der BB Mathematik im MZH:
  `19h inf 001 k/100-2500`
- Meghyn Bienvenu.
  Automata on Infinite Words and Trees.
  Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
  Kapitel 4.
  `http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf`

Literatur für diesen Teil (Basis, 2)

- Christel Baier, Joost-Pieter Katoen.
  Principles of Model Checking.
  MIT Press 2008.
  Abschnitt 6 „Computation Tree Logic".
  SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/782`, `a inf 440 ver/782a`
- Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron A. Peled.
  Model Checking.
  MIT Press 1999.
  Abschnitt 3 „Temporal Logics",
  Abschnitt 4 „Model Checking".
  SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/780(6)`, `a inf 440 ver/780(6)a`

Literatur für diesen Teil (weiterführend)

- Edmund M. Clarke, I. A. Draghicescu
  Expressibility Results for Linear-Time and Branching-Time Logics
  REX Workshop 1988, S. 428–437.
  `https://doi.org/10.1007/BFb0013029`