Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2017/18

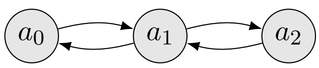
Logik

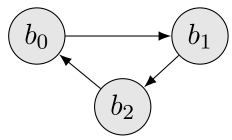
Übungsblatt 6

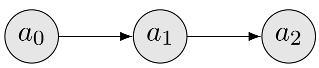
Abgabe bis **So., 21. 1., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 6“, als PDF.
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

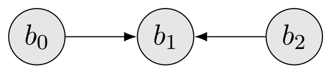
---

1. (25 %) Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass *Spoiler* eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathsf{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

a) $\mathfrak{A}_1$ 

$\mathfrak{B}_1$ 

b) $\mathfrak{A}_2$ 

$\mathfrak{B}_2$ 

c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$

Die Markierungen a_i, b_i sind die Namen der Elemente der Universen, keine Konstanten.

2. (25 %) Zeige, dass

a) *Duplicator* auf den Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat (verwende, dass beide Ordnungen dicht sind).

b) $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ (verwende a)).

3. (25 %) Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an. Die Signatur ist jeweils $\tau = \{E\}$ mit einem binären Relationssymbol E, das die Kanten im Graph beschreibt. Es darf angenommen werden, dass E in allen betrachteten Strukturen eine symmetrische Relation ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspricht).

a) 2-Färbbarkeit (Definition analog zu 4-Färbbarkeit)

b) Es gibt eine Teilmenge U von höchstens k Knoten, so dass jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knoten aus U verbunden ist (*Vertex cover* der Größe k).

4. (25 %)

a) Gib für das Wort $(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}^3$ die entsprechende S1S-Struktur an.

b) Beschreibe die S1S-Strukturen, die der Sprache $L((0,0,1)^+ \cdot (1,1,0) \cdot (0,1,0)^+)$ entsprechen.

c) Gib für die Sprache $(001)^* \subseteq \{0,1\}^*$ einen S1S-Satz φ mit $L \setminus \{\varepsilon\} = L(\varphi)$ an.

d) Sei S1S$^+$ die Erweiterung von S1S um Quantifizierung über Relationsvariablen beliebiger Stelligkeit. Zeige:

$$\text{Es gibt einen S1S}^+\text{-Satz } \varphi \text{ mit } L(\varphi) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}.$$

Bitte wenden.

5. Zusatzaufgabe (20 %) Beweise die Aussage aus der Vorlesung, dass für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ erfüllt die Peano-Axiome zweiter Stufe genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ isomorph zur Struktur $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ ist.

Hinweise zum Vorgehen:

- Zur Erinnerung die Peano-Axiome zweiter Stufe:

$$\forall x\, \mathsf{nf}(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$\forall x \forall y\, (\mathsf{nf}(x) = \mathsf{nf}(y) \to x = y) \tag{2}$$

$$\forall X\, \Big(\big(X(0) \wedge \forall x\, (X(x) \to X(\mathsf{nf}(x))) \big) \to \forall x\, X(x) \Big) \tag{3}$$

- Für „⇒“ konstruiere eine geeignete Abbildung von $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ nach $\mathfrak{A}$ und zeige, dass sie ein Isomorphismus ist; beispielsweise solltest Du Injektivität bzw. Surjektivität zeigen können, indem Du die Erfülltheit von (1) und (2) bzw. (3) benutzt.
- Für „⇐“ kannst Du benutzen, dass das Isomorphielemma auch für die Logik zweiter Stufe gilt, ohne dies gesondert zu beweisen.