Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2017/18

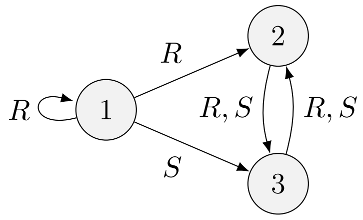
Logik

Übungsblatt 4

Abgabe bis **So., 10. 12., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 4“, als PDF. Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (25 %) Betrachte die nebenstehende Struktur $\mathfrak{A}$ (von Blatt 3, Aufgabe 1). Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:



a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists y\, S(x, y)$ mit $\beta_1(x) = 2$

b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall x\, (R(x, y) \vee S(x, y))$ mit $\beta_2(y) = 1$

2. (25 %) Wir betrachten ein Datenbankschema mit den Relationen Film, Schauspieler_in und Programm. Dabei hat Film die Attribute (Titel, Jahr, Regisseur_in), Schauspieler_in die Attribute (Titel, Name) und Programm die Attribute (Titel, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstanz für dieses Schema ist:

Film

Titel	Jahr	Regisseur_in
Mockingjay 2	2015	Francis Lawrence
...		

Schauspieler_in

Titel	Name
Mockingjay 2	Jennifer Lawrence
Avatar	Josh Hutcherson
...	

Programm

Titel	Kino	Uhrzeit
Mockingjay 2	Cinemaxx	19:50
Mockingjay 2	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

a) Regisseur_innen, die auch Schauspieler_innen sind

b) Regisseur_innen, die in ihren eigenen Filmen mitgespielt haben

c) Kinos, die mindestens zwei verschiedene Filme zur selben Uhrzeit zeigen

d) Schauspieler_innen, die in nur einem Film mitspielen

e) Paare (s, k) von Schauspieler_innen und Kinos, die einen Film dieser/s Schauspielerin/s zeigen

f) Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es eine_n Schauspieler_in gibt, die/der in unterschiedlichen Kinos zu sehen ist.

Bitte wenden.

3. (25 %) Seien φ, ψ beliebige FO-Formeln. Zeige oder widerlege:

a) $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$

b) $\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$

c) $\exists x\, \forall y\, \varphi \;\models\; \forall y\, \exists x\, \varphi$

d) $\forall y\, \exists x\, \varphi \;\models\; \exists x\, \forall y\, \varphi$

e) Der Satz $\forall x_1\, \forall x_2\, \forall y\, \Big(f(x_1) = y \;\wedge\; f(x_2) = y \;\rightarrow\; x_1 = x_2\Big)$ ist gültig.

4. (25 %) Bringe die folgenden Formeln mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in Pränex-Normalform:

a) $\forall y\, \Big(R(x,y) \rightarrow P(y) \vee \neg\exists x\, \big(S(y,x) \wedge Q(x)\big)\Big)$

b) $\forall x\, \Big(P(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,x) \wedge \neg\forall y\, Q(x,y)\Big)$

5. Zusatzaufgabe (20 %) Ein FO-Satz ist in *Skolemform*, wenn er in Pränex-Normalform (PNF) ist und keine Existenzquantoren enthält. Einen gegebenen Satz $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \psi$ in PNF kann man (in polynomieller Zeit) in einen Satz $\mathsf{skol}(\varphi)$ in Skolemform wandeln, indem man erschöpfend

$$\forall x_1 \cdots \forall x_{i-1}\, \exists x_i\, Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k\, x_k\, \psi \qquad \text{ersetzt durch}$$
$$\forall x_1 \cdots \forall x_{i-1}\, Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_k x_k\, \psi',$$

wobei man ψ' aus ψ erhält, indem man die Variable x_i durch den Term $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ ersetzt; dabei ist f_i ein (in jedem Schritt) neu eingeführtes Funktionssymbol.

a) Wandle folgende Formel in Skolemform:

$$\forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3\, \exists x_4\, \Big(R(x_1, x_3) \rightarrow P(x_2) \vee Q(x_4)\Big)$$

b) Beweise oder widerlege, dass für alle FO-Sätze φ gilt:

(i) φ ist äquivalent zu $\mathsf{skol}(\varphi)$

(ii) φ ist erfüllbar gdw. $\mathsf{skol}(\varphi)$ erfüllbar ist.

Hinweis: Eine der beiden Aussagen ist wahr, die andere falsch.