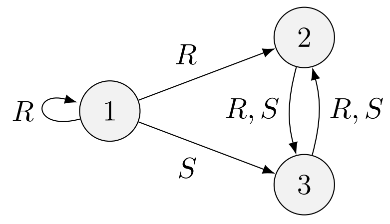
Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2017/18

# Logik

## Übungsblatt 3

Abgabe bis **So., 26. 11., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 3“, als PDF. Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

**1.** (28 %) Gegeben ist die folgende Struktur $\mathfrak{A}$, wobei $R$ und $S$ binäre Relationssymbole sind.




a) (16 %) Gib für jeden der folgenden Sätze $\varphi_i$ an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$, und begründe kurz.

(i) $\varphi_1 = \forall x \left(\exists y\, R(x,y) \land \exists y\, S(x,y)\right)$

(ii) $\varphi_2 = \forall x\, \exists y \left(R(x,y) \land S(x,y)\right)$

(iii) $\varphi_3 = \exists x\, \exists y\, \exists z\, \exists u \left(R(x,y) \land R(y,z) \land R(z,u) \land R(u,x)\right)$

(iv) $\varphi_4 = \forall x\, \forall y\, \forall z \left(\left(R(x,y) \land R(y,z)\right) \rightarrow x = z\right)$

b) (12 %) Gib je eine Formel $\varphi(x)$ an, so dass das Folgende gilt, und begründe kurz.

(i) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) = 1$

(ii) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{2, 3\}$

**2.** (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ aus der Vorlesung. Gib FO-Sätze an, die die folgenden Aussagen beschreiben:

a) Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von 4 Quadraten natürlicher Zahlen darstellen (Satz von Lagrange).

b) Es gibt beliebig große Abstände zwischen aufeinander folgenden Primzahlen.

c) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt: es gibt mindestens zwei Primzahlen zwischen $n^2$ und $(n+1)^2$ (Vermutung von Opperman).

Die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen $\mathsf{Prim}(x)$ und $x > y$ dürfen verwendet werden. Zusätzlich verwendete Abkürzungen müssen definiert werden.

**3.** (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{A}$ aus Aufgabe 1. Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists y\, S(x,y)$ mit $\beta_1(x) = 2$

b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall x\, (R(x,y) \lor S(x,y))$ mit $\beta_2(y) = 1$

Bitte wenden.

**4.** (24 %) Das *Spektrum* eines FO-Satzes $\varphi$, geschrieben $\mathsf{Spek}(\varphi)$, ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$, so dass $\varphi$ ein Modell mit einem Universum der Größe $n$ besitzt. Beispielsweise gilt $\mathsf{Spek}\big(\forall x\,(x = x)\big) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) (18 %) Bestimme das Spektrum folgender Sätze. Begründe jeweils kurz.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x\,\big(P(x) \wedge \neg P(x)\big)\\
\varphi_2 &= \exists x\,\exists y\,(x \neq y)\\
\varphi_3 &= \exists x\,\exists y\,\Big(x \neq y \wedge \forall z\,(z = x \vee z = y)\Big)\\
\varphi_4 &= \forall x\,\Big(f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x\Big)
\end{aligned}$$

b) (6 %) Zeige: wenn $\varphi \models \psi$, dann $\mathsf{Spek}(\varphi) \subseteq \mathsf{Spek}(\psi)$.

Ohne Wertung: Gilt die Umkehrung dieser Implikation? Begründe.

**5. Zusatzaufgabe** (20 %) Zeige, dass jede endliche Struktur durch einen FO-Satz bis auf Isomorphie eindeutig beschrieben werden kann. Genauer: zeige die folgende Aussage.

Für jede Struktur $\mathfrak{A} = (A, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_m^{\mathfrak{A}})$ mit $|A| < \infty$ gibt es einen FO-Satz $\varphi$, so dass

- $\mathfrak{A} \models \varphi$ und
- wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$, dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.