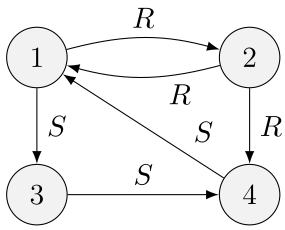
Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2016/17

Logik

Übungsblatt 3

Abgabe am 29. 11. zu Beginn der Übung

1. (28 %) Gegeben ist die folgende Struktur $\mathfrak{A}$, wobei R und S binäre Relationssymbole sind.



a) Gib für jeden der folgenden Sätze φ_i an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$, und begründe kurz. (12 %)

(i) $\varphi_1 = \forall x \exists y \Big(R(x,y) \vee S(x,y) \Big)$

(ii) $\varphi_2 = \exists y \forall x \Big(R(x,y) \vee S(x,y) \Big)$

(iii) $\varphi_3 = \exists x \exists y \exists z \exists u \Big(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,u) \wedge R(u,x) \Big)$

(iv) $\varphi_4 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \big) \rightarrow x = z \Big)$

b) Gib je eine Formel $\varphi(x)$ an, so dass das Folgende gilt, und begründe kurz. (16 %)

(i) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{1, 2\}$

(ii) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{2, 3\}$

2. (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ aus der Vorlesung. Gib FO-Sätze an, die die folgenden Aussagen beschreiben:

a) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt: es gibt eine Primzahl zwischen n und $2n$ (Satz von Bertrand).

b) Jede ungerade Zahl größer 1 ist Summe von fünf oder weniger Primzahlen (Satz von T. Tao).

c) Es gibt beliebig große Abstände zwischen aufeinander folgenden Primzahlen.

Die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen $\mathsf{Prim}(x)$ und $x > y$ dürfen verwendet werden. Zusätzlich verwendete Abkürzungen müssen definiert werden.

3. (24 %) Betrachte die Struktur $\mathfrak{A}$ aus Aufgabe 1. Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists x\, R(x,y)$ mit $\beta_1(y) = 1$

b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall y\, (R(x,y) \vee S(x,y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

Bitte wenden.

4. (24 %) Das *Spektrum* eines FO-Satzes φ ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, so dass φ ein Modell mit einem Universum der Größe n besitzt. Zeige:

   a) $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines FO-Satzes.

   b) $\{2\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.

   c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.

   d) (ohne Wertung) Gibt es *erfüllbare* FO-Sätze mit leerem Spektrum?

   Die Sätze dürfen über einer beliebigen Signatur formuliert sein.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Zeige, dass jede endliche Struktur durch einen FO-Satz bis auf Isomorphie eindeutig beschrieben werden kann. Genauer: zeige die folgende Aussage.

   Für jede Struktur $\mathfrak{A} = (A, P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_m^{\mathfrak{A}})$ mit $|A| < \infty$ gibt es einen FO-Satz φ, so dass

   - $\mathfrak{A} \models \varphi$ und
   - wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$, dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.