2. Nachweis der Nichterkennbarkeit

Nicht jede formale Sprache ist erkennbar. Im Gegenteil ist es so, dass nur solche Sprachen, die auf sehr reguläre Weise aufgebaut sind, erkennbar sein können. Es stellt sich also die Frage, wie man von einer Sprache nachweist, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Um nachzuweisen, dass eine gegebene Sprache erkennbar ist, genügt es, einen endlichen Automaten (DEA oder NEA) dafür anzugeben. Der Nachweis, dass eine Sprache nicht erkennbar ist, gestaltet sich schwieriger: man kann nicht alle unendlich viele existierende Automaten durchprobieren und es genügt auch nicht, zu sagen, dass man keinen funktionierenden Automaten gefunden hat.

Darum verwendet man die folgende Strategie. Man etabliert allgemeine Eigenschaften, die von jeder erkennbaren Sprache erfüllt werden. Um von einer Sprache zu zeigen, dass sie nicht erkennbar ist, genügt es dann, nachzuweisen, dass sie die Eigenschaft verletzt. Die wichtigste solche Eigenschaft wird durch das bekannte Pumping-Lemma beschrieben. Bevor wir es formulieren, verdeutlichen wir die zugrunde liegenden Gedanken an einer Beispielsprache.

Beispiel 2.1

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist *nicht* erkennbar.

Bevor wir den Beweis erbringen, überlegen wir uns intuitiv, was ein endlicher Automat tun müsste, um L zu erkennen. Er müsste für jedes Eingabewort w die Anzahl der gelesenen a's mit denen der danach gelesenen b's vergleichen und w genau dann akzeptieren, wenn diese Anzahlen übereinstimmen. Da ein endlicher Automat jedoch nur eine endliche Anzahl von Zuständen hat, aber die Zahl n in der Beschreibung von L unbegrenzt groß werden kann, ist dieses Zählen von keinem endlichen Automaten zu bewerkstelligen.

Man beachte, dass dieser Gedankengang nur *Intuitionen* wiedergibt. Er taugt nicht als formaler Beweis, denn er basiert auf der nur schwer exakt zu belegenden Annahme, dass die einzige Möglichkeit L zu erkennen auf dem Zählen von a's und b's basiert. Ein korrekter Beweis für die Nichterkennbarkeit von L sieht so aus:

Beweis. Angenommen, L sei erkennbar. Dann gibt es einen NEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$. Dieser NEA hat eine endliche Anzahl von Zuständen, sagen wir n_0 Stück. Wir betrachten das Wort $w = a^{n_0} b^{n_0} \in L$. Da $w \in L(\mathcal{A})$, gibt es einen Pfad vom Anfangszustand q_0 zu irgendeinem Endzustand q_f in $\mathcal{A}$, der mit w beschriftet ist. Die ersten $n_0 + 1$ Zustände (einschließlich q_0) auf diesem Pfad werden durch Lesen der a's erreicht. Da $\mathcal{A}$ nur n_0 Zustände hat, muss unter diesen $n_0 + 1$ Zuständen ein Zustand q doppelt vorkommen. Der genannte Pfad lässt sich also auch schreiben als

$$q_0 \overset{x}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{y}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{z}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f \,,$$

wobei x, y, z Teilwörter von w sind mit $w = xyz$. Weil q in diesem Pfad doppelt auftaucht, kann man den Teilpfad zwischen diesen beiden Vorkommen verdoppeln und erhält einen Pfad

$$q_0 \overset{x}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{y}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{y}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{z}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f$$

auf dem Wort $xyyz$. Damit enthält $L(\mathcal{A})$ das Wort $xyyz$, welches die Form

$$a^{k_1}\, a^{2k_2}\, a^{k_3}\, b^{n_0}$$

mit $k_1 + 2k_3 + k_3 > n_0$ hat. Also hat $xyyz$ mehr a's als b's und kann damit nicht zu L gehören, obwohl es von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird. Dies ist ein Widerspruch; also war die Annahme falsch, dass L erkennbar sei! □

Der dem letzten Beweis zugrunde liegende Hauptgedanke lässt sich verallgemeinern: Wenn wir annehmen, dass eine Sprache L mittels eines endlichen Automaten $\mathcal{A}$ erkennbar sei, und ein Wort $w \in L$ betrachten, das mehr Symbole enthält als $\mathcal{A}$ Zustände hat, dann muss $\mathcal{A}$ beim Akzeptieren von w einen Zustand q doppelt besuchen. Deshalb enthält L auch sämtliche Wörter, die man erhält, wenn man den Teil zwischen diesen beiden Besuchen von q beliebig vervielfacht. Dies ist im Wesentlichen die Aussage des Pumping-Lemmas.

Lemma 2.2 (Pumping-Lemma für erkennbare Sprachen)
Es sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so dass gilt: Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ lässt sich zerlegen in $w = xyz$ mit

- *$y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq n_0$*
- *$xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Wir wählen $n_0 = |Q|$. Sei nun $w = a_1 \cdots a_m \in L$ ein Wort mit $m \geq n_0$. Dann existiert ein Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_{n_0}}_{\mathcal{A}} p_{n_0} \xrightarrow{a_{n_0+1}}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_m}_{\mathcal{A}} p_m$$

mit $p_0 = q_0$ und $p_m \in F$. Wegen $m \geq n_0 = |Q|$ können die $n_0 + 1$ Zustände $p_0, \ldots, p_{n_0}$ nicht alle verschieden sein. Es gibt also i, j mit $0 \leq i < j \leq n_0$ und $p_i = p_j$. Wir wählen

$$x := a_1 \cdots a_i, \quad y := a_{i+1} \cdots a_j, \quad z := a_{j+1} \cdots a_m.$$

Offensichtlich gilt $y \neq \varepsilon$ (da $i < j$) und $|xy| \leq n_0$ (da $j \leq n_0$) sowie

$$q_0 = p_0 \xRightarrow{x}_{\mathcal{A}} p_i \xRightarrow{y}_{\mathcal{A}} p_i = p_j \xRightarrow{z}_{\mathcal{A}} p_m \in F.$$

Folglich gilt für alle $k \geq 0$ auch $p_i \xRightarrow{y^k}_{\mathcal{A}} p_i$, also

$$q_0 = p_0 \xRightarrow{x}_{\mathcal{A}} p_i \xRightarrow{y^k}_{\mathcal{A}} p_i = p_j \xRightarrow{z}_{\mathcal{A}} p_m \in F,$$

was $xy^kz \in L$ zeigt. □

Wir zeigen mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $\{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ nicht erkennbar ist.

Beispiel 2.3
Wir benutzen jetzt das Pumping-Lemma um zu zeigen:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ erkennbar.}$$

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, L sei erkennbar. Es gibt also eine Zahl n_0 mit den in Lemma 2.2 beschriebenen Eigenschaften. Wähle das Wort

$$w = a^{n_0} b^{n_0} \in L.$$

Da $|w| \geq n_0$, gibt es eine Zerlegung $a^{n_0} b^{n_0} = xyz$ mit $|y| \geq 1$ und $|xy| \leq n_0$ sowie $xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$. Wegen $|xy| \leq n_0$ muss y ganz in a^{n_0} liegen. Also ist

$$x = a^{k_1}, \quad y = a^{k_2}, \quad z = a^{k_3} b^{n_0}$$

mit $k_2 > 0$ und $n_0 = k_1 + k_2 + k_3$. Damit ist aber

$$xy^0 z = xz = a^{k_1 + k_3} b^{n_0} \notin L,$$

da $k_1 + k_3 < n_0$. Widerspruch. Deshalb muss die Annahme „L ist erkennbar“ falsch sein. □

Beweise mithilfe des Pumping-Lemmas werden einfacher, wenn man die logische Struktur der Aussage genauer betrachtet: Lemma 2.2 hat die Form einer Implikation

$$\text{wenn } X, \text{ dann } Y,$$

wobei X die Aussage „L ist eine erkennbare Sprache“ und Y die Aussage „es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1, \ldots$“ darstellt. Anstatt wie in Beispiel 2.3 einen Widerspruchsbeweis zu führen, ist es bequemer, die *Kontraposition* der obigen Aussage zu verwenden:

$$\text{wenn nicht } Y, \text{ dann nicht } X.$$

Da eine Implikation und ihre Kontraposition logisch äquivalent sind, ergibt sich folgende direkte Konsequenz aus dem Pumping-Lemma.

Korollar 2.4 (Pumping-Lemma als Kontrapositiv)
Angenommen, für eine Sprache L gilt das Folgende:

Für alle *natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$*
  gibt es *ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$, so dass*
    für alle *Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq n_0$ gilt:*
      es gibt *$k \geq 0$ mit $xy^k z \notin L$.*

Dann ist L ***nicht*** *erkennbar.*

Diese äquivalente Formulierung des Pumping-Lemmas legt eine *spieltheoretische Sicht* nahe: Wir spielen in Runden gegen einen Gegner. Der Gegner will zeigen, dass die fragliche Sprache L erkennbar ist; wir wollen zeigen, dass sie es nicht ist. In den Zeilen, die mit „für alle“ beginnen, ist der Gegner am Zug; in den Zeilen, die mit „es gibt“ beginnen, sind wir an der Reihe. Wenn wir das Spiel *stets gewinnen können* – und zwar unabhängig davon, was der Gegner tut – dann ist die Eigenschaft aus Korollar 2.4 erfüllt, also ist L nicht erkennbar.

Dieses Spiel verdeutlichen wir an den folgenden zwei Beispielen.

Beispiel 2.5
$L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis. Sei $n_0 \geq 1$ eine natürliche Zahl (vom Gegner gewählt, also können wir n_0 nicht näher bestimmen). Wir wählen das Wort $w = a^m$ mit $m = (n_0 + 1)^2$. Für dieses Wort gilt $w \in L$ und $|w| > n_0$. Sei nun xyz eine Zerlegung (vom Gegner gewählt) mit den Eigenschaften

$$y \neq \varepsilon \quad \text{und} \quad |xy| \leq n_0.$$

Wir müssen nun ein $k \geq 0$ finden, so dass $xy^kz \notin L$. Dazu beobachten wir zunächst, dass wegen $|w| > n_0$ und $|xy| \leq n_0$ gilt: $z \neq \varepsilon$. Wir wollen nun zeigen, dass wir y so „aufpumpen“ können, dass die Wortlänge die Form $s^2 + t$ bekommt, für geeignete s, t mit $0 < t < s$. So eine Zahl kann nämlich nie eine Quadratzahl sein, denn es gilt

$$s^2 \quad < \quad s^2 + t \quad < \quad s^2 + 2s + 1 \quad = \quad (s+1)^2.$$

Wenn wir nun $k = 4 \cdot |y| \cdot |w|^2$ wählen, erreichen wir dieses Ziel, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |xy^kz| &= |y| \cdot k + |x| + |z| \\ &= 4 \cdot |y|^2 \cdot |w|^2 + |x| + |z| \\ &= (2 \cdot |y| \cdot |w|)^2 + |x| + |z| \end{aligned}$$

Mit $s = 2 \cdot |y| \cdot |w|$ und $t = |x| + |z|$ gilt nun wie gewünscht $|xy^kz| = s^2 + t$ und $0 < t < s$. Also ist $xy^kz \notin L$, was zu zeigen war (d. h. wir gewinnen das Spiel). □

Der Beweis im vorangehenden Beispiel erfordert zwei kreative Schritte von uns: wir müssen (in Abhängigkeit von n_0, das der Gegner uns vorgibt) ein geeignetes Wort w wählen und dann (in Abhängigkeit von der Zerlegung $w = xyz$, die der Gegner uns vorgibt) ein geeignetes k finden, so dass wir logisch zwingend argumentieren können, dass xy^kz nicht in L sein kann. Der erste Schritt war in diesem Beispiel eher naheliegend: $w = a^{(n_0)^2}$ hätte es nicht erlaubt, $z = \varepsilon$ zu folgern, also haben wir $w = a^{(n_0+1)^2}$ gewählt. Im nächsten Beispiel müssen wir bei der Wahl von w etwas kreativer sein.

Beispiel 2.6
$L = \{a^nb^m \mid n \neq m\}$ ist *nicht* erkennbar.

Beweis. Sei wieder $n_0 \geq 1$ eine natürliche Zahl (vom Gegner gewählt). Wir wählen das Wort $w = a^{n_0} b^{n_0!+n_0}$. Der intuitive Grund für diese Wahl ist, dass wir (a) wie in Beispiel 2.3 erzwingen wollen, dass das y der Zerlegung vollständig in den a's liegt, und (b) wir durch „Aufpumpen“ von y erreichen müssen, dass das so gepumpte Wort genauso viele a's wie b's enthält. Da das Aufpumpen einer a-Folge der Multiplikation der Anzahl der a's entspricht, müssen wir die Anzahl der b's im Wesentlichen so wählen, dass sie durch alle Zahlen bis n_0 teilbar ist, und das ist der Fall für die Fakultätsoperation: $n_0! = 1 \cdot \ldots \cdot n_0$.

Sei nun xyz eine Zerlegung (vom Gegner gewählt) mit den Eigenschaften

$$y \neq \varepsilon \quad \text{und} \quad |xy| \leq n_0,$$

d. h. wie gewünscht liegt y vollständig in den a's. Also gilt:

$$x = a^{k_1}, \quad y = a^{k_2}, \quad z = a^{k_3} b^{n_0!+n_0}$$

für geeignete k_1, k_2, k_3 mit $k_1 + k_2 + k_3 = n_0$ und $k_2 > 0$ (da $y \neq \varepsilon$). Jetzt zahlt sich die Wahl der Fakultätsoperation aus: wegen $0 < k_2 \leq n_0$ gibt es nämlich eine Zahl ℓ mit

$$\ell \cdot k_2 = n_0!\,.$$

Wir können nun $k = \ell + 1$ wählen, denn dann ist die Anzahl a's im Wort $xy^{\ell+1}z$:

$$\begin{aligned} k_1 + (\ell+1)k_2 + k_3 &= \underbrace{k_1 + k_2 + k_3}_{=n_0} + \underbrace{\ell \cdot k_2}_{=n_0!} \\ &= n_0 + n_0! \end{aligned}$$

Da die b's nur im Teilwort z auftreten, ist deren Anzahl unverändert gleich $n_0 + n_0!$. Also ist $xy^{\ell+1}z = a^{n_0+n_0!} b^{n_0+n_0!} \notin L$, was zu zeigen war (d. h. wir gewinnen das Spiel). □

Mit Hilfe des Pumping-Lemmas gelingt es leider nicht immer, die Nichterkennbarkeit einer Sprache nachzuweisen, denn es gibt Sprachen, die nicht erkennbar sind, aber trotzdem die in Lemma 2.2 beschriebene Pumping-Eigenschaft erfüllen. Anders ausgedrückt ist die Pumping-Eigenschaft aus Lemma 2.2 zwar *notwendig* für die Erkennbarkeit einer Sprache, aber nicht *hinreichend.*

Beispiel 2.7

Ist $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ erkennbar?

Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.2 zu zeigen, so scheitert man, da L die Eigenschaft aus dem Pumping-Lemma erfüllt:

Betrachte $n_0 = 3$ (vom Gegner gewählt). Es sei nun $w \in L$ mit $|w| \geq 3$, d. h. es tritt einer der folgenden drei Fälle ein.

1. $w = a^m b^n c^n$ mit $m, n \geq 1$ (w ist aus dem „1. Teil“ von L)

2. $w = b^m c^n$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 0$ (w ist aus dem „2. Teil“ von L und beginnt mit b)
3. $w = c^n$ mit $n \geq 1$ (w ist aus dem „3. Teil“ von L und beginnt mit c, da $|w| \geq 3$)

Wir zeigen: in jedem dieser drei Fälle lässt sich w zerlegen in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq n_0$ sowie $xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

1. Fall. Wenn $w = a^m b^n c^n$ mit $m, n \geq 1$, dann sei die Zerlegung

$$x = \varepsilon, \quad y = a, \quad z = a^{m-1} b^n c^n$$

betrachtet (vom Gegner gewählt). Dann ist für *jedes* $k \geq 0$ das Wort

$$xy^k z = a^{k+(m-1)} b^n c^n$$

in L, denn die Anzahlen der a's und b's sind im „1. Teil“ unabhängig (und falls $(m-1) + k = 0$, ist $xy^k z$ im „2. Teil“ von L).

2. Fall. Wenn $w = b^m c^n$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 0$, dann sei die Zerlegung

$$x = \varepsilon, \quad y = b, \quad z = b^{m-1} c^n$$

betrachtet (vom Gegner gewählt). Dann ist für *jedes* $k \geq 0$ das Wort

$$xy^k z = b^{k+(m-1)} c^n$$

in L, denn die Anzahlen der b's und c's sind im „2. Teil“ unabhängig.

3. Fall. Wenn $w = c^n$ mit $n \geq 1$, dann sei die Zerlegung

$$x = \varepsilon, \quad y = c, \quad z = c^{n-1}$$

betrachtet (vom Gegner gewählt). Dann ist für *jedes* $k \geq 0$ das Wort

$$xy^k z = c^{k+(n-1)}$$

in L (wiederum im „2. Teil“).

Wir können also in keinem der drei Fälle erreichen, dass $xy^k z \notin L$ (d. h. wir gewinnen das Spiel nicht). Dadurch misslingt der Nachweis, dass L nicht erkennbar ist.

Im Abschnitt 5 werden wir ein Werkzeug kennen lernen, mit dem der Nachweis der Nichterkennbarkeit dieser Sprache L gelingt.

In der Literatur findet man verschärfte (und kompliziertere) Varianten des Pumping-Lemmas, die dann auch hinreichend sind (z. B. Jaffes Pumping-Lemma). Diese Varianten liefern also eine automatenunabhängige Charakterisierung der erkennbaren Sprachen.