Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2015/16

Logik

Übungsblatt 6

Abgabe am 20. 1. zu Beginn der Übung

---

1. (30 %) Sei Γ eine (potentiell unendliche) Menge von FO-Sätzen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Γ ist gültig gdw. jede endliche Teilmenge $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ gültig ist;

b) Γ ist unerfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ unerfüllbar ist;

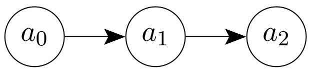
c) Wenn Γ ein Modell hat, dann auch ein unendliches Modell;

d) (fakultativ für zusätzliche 10 %) Wenn Γ ein Modell hat, dann auch ein endliches oder abzählbar unendliches Modell.

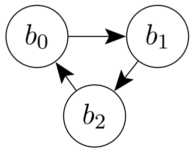
Hinweis: alle Beweise können elementar geführt werden, indem man die Definition von Gültigkeit, Erfüllbarkeit usw. verwendet. Das Kompaktheitstheorem oder die Sätze von Löwenheim-Skolem werden nicht benötigt (und helfen wahrscheinlich auch nicht).

2. (24 %) Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass *Spoiler* eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathsf{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

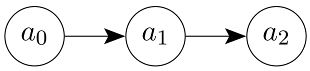
a) $\mathfrak{A}_1$:



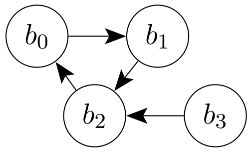
$\mathfrak{B}_1$:



b) $\mathfrak{A}_2$:



$\mathfrak{B}_2$:



c) (fakultativ für zusätzliche 12 %) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{N}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$

Die Markierungen a_i, b_i sind die Namen der Elemente der Universen, keine Konstanten!

3. (22 %) Zeige, dass

a) *Duplicator* auf den Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat (verwende, dass beide Ordnungen dicht sind).

b) $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ (verwende a)).

4. (24 %) Gib für die folgenden Eigenschaften definierende SO-Sätze an. Die Signatur ist jeweils $\tau = \{E\}$ mit E binärem Relationssymbol, das die Kanten im Graph beschreibt. Es darf angenommen werden, dass E in allen betrachteten Strukturen eine symmetrische Relation ist (was der Ungerichtetheit der Graphen entspricht).

a) 2-Färbbarkeit

b) Azyklizität (erinnere Dich an die Formel für Erreichbarkeit aus der Vorlesung)

5. Zusatzaufgabe (25 %) Beweise die Aussage aus der Vorlesung, dass für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ erfüllt die Peano-Axiome zweiter Stufe genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ isomorph zur Struktur $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ ist.

Hinweise zum Vorgehen:

- Zur Erinnerung die Peano-Axiome zweiter Stufe:

$$\forall x\, \mathsf{nf}(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$\forall x \forall y\, (\mathsf{nf}(x) = \mathsf{nf}(y) \to x = y) \tag{2}$$

$$\forall X\, \Big(\big(X(0) \wedge \forall x\, (X(x) \to X(\mathsf{nf}(x))) \big) \to \forall x\, X(x) \Big) \tag{3}$$

- Für „⇒“ konstruiere eine geeignete Abbildung von $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$ und zeige, dass sie ein Isomorphismus ist; beispielsweise solltest Du Injektivität bzw. Surjektivität zeigen können, indem Du die Erfülltheit von (1) und (2) bzw. (3) benutzt.
- Für „⇐“ kannst Du benutzen, dass das Isomorphielemma auch für die Logik zweiter Stufe gilt, ohne dies gesondert zu beweisen.

Allgemeiner Hinweis: Mit Zusatzpunkten (Aufgaben 1d, 2c und 5) könnt ihr bei diesem Blatt ausnahmsweise bis zu 120% erreichen.