Logik

Übungsblatt 2

Abgabe am 4. 11. zu Beginn der Übung

---

1. (26 %) Wende den Polyzeit-Algorithmus aus der Vorlesung an, um die Erfüllbarkeit folgender Horn-Formeln zu entscheiden. Im Fall von Erfüllbarkeit gib ein minimales Modell für die Formel an.

a) $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge x_1 \wedge \neg x_4 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

b) $(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge x_2 \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee \neg x_5)$

2. (24 %) Beweise die folgenden Aussagen:

a) Eine DNF-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Disjunkt ohne Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

b) $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \models \psi$

c) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\varphi \models \neg\psi$, dann ist φ unerfüllbar.

d) $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ gültig ist.

3. (24 %)

a) Berechne $\mathrm{Res}^*(M)$ für die Klauselmenge M, die der folgenden Formel entspricht:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge x_4$$

Ist die Formel erfüllbar?

b) Gib einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit der folgenden Formel an:

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge x_5$$

c) Berechne $\mathrm{ERes}^*(M)$ für die Klauselmenge M, die der folgenden Horn-Formel entspricht:

$$x_1 \wedge (x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \wedge x_4 \to x_3) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \to 0) \wedge x_4$$

Ist die Formel erfüllbar?

4. (26 %)

a) Gib Hornklauselmengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$ an, so dass die Größe von M_n polynomiell in n beschränkt ist, die Größe von $\mathrm{ERes}^*(M_n)$ aber exponentiell in n ist.

b) Um einen Polynomialzeitalgorithmus aus dem Resolutionssatz für Einheitsresolution abzuleiten, modifizieren wir die Funktion ERes. Dafür legen wir eine lineare Ordnung $<$ auf den Variablen fest, d. h. $x_1 < x_2 < \cdots$. Eine Klausel C ist eine *minimale Einheitsresolvente von M*, wenn

- sie eine Einheitsresolvente von zwei Klauseln C_1, C_2 aus M ist mit $C_1 = \{x_i\}$
- und es kein $\neg x_j \in C_2$ gibt mit $x_j < x_i$.

Bitte wenden.

Wir definieren nun die Funktion OERes durch

$$\mathrm{OERes}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ minimale Einheitsresolvente von } M\}$$

und definieren $\mathrm{OERes}^i(M)$ sowie $\mathrm{OERes}^*(M)$ analog zu $\mathrm{Res}^i(M)$ und $\mathrm{Res}^*(M)$ aus der Vorlesung. Man kann leicht zeigen, dass der Resolutionssatz für Einheitsresolution auch für die modifizierte Funktion OERes^* gilt.

Zeige, dass $|\mathrm{OERes}^*(M)|$ polynomiell von $|M|$ abhängt und dass auch die Berechnung von $\mathrm{OERes}^*(M)$ in Polynomialzeit möglich ist.

5. **Zusatzaufgabe** (25 %)

Zeige, dass sich jede Formel φ in polynomieller Zeit in eine Formel ψ in KNF transformieren lässt, so dass gilt: φ ist erfüllbar genau dann, wenn ψ erfüllbar ist.

Hinweis: Da die Transformation in polynomieller Zeit stattfinden soll, kann ψ natürlich auch nur polynomiell länger sein als φ. Wie in der Vorlesung gezeigt (Paritätsfunktion), kann ψ daher im allgemeinen nicht äquivalent zu φ sein. Es ist notwendig, zusätzliche Variablen einzuführen. Teilformeln spielen eine Rolle.