AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

5. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 32%

(a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

(i) $\varphi, (\psi \vee \vartheta) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi), (\varphi \wedge \vartheta)$

(ii) $(\varphi_1 \vee \neg\psi), (\varphi_2 \vee \psi) \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

(iii) $\forall y\ (\neg R(a, y) \vee R(a, f(y))), R(a, a) \Rightarrow R(a, f(f(a)))$

(b) Zeige, dass für die Korrektheit der Regel ($\Rightarrow \forall$) die Bedingung “c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$” wichtig ist. Gib dafür einen SK-Beweis einer *nicht* gültigen Sequenz an, der die Regel ($\Rightarrow \forall$) anwendet, ohne auf die Bedingung zu achten.

Aufgabe 2: 24%

Man kann den Sequenzenkalkül um zusätzliche Regeln erweitern, die es erlauben, Beweise abzukürzen. Die neuen Regeln müssen natürlich korrekt sein, um die Korrektheit des Kalküls als Ganzes nicht zu zerstören. Entscheide, ob die folgenden Regeln korrekt sind, ob also gilt: wenn die Sequenzen in der oberen Zeile gültig sind, dann auch die Sequenz in der unteren Zeile. Falls das der Fall ist, gib einen Beweis ähnlich wie im Korrektheitsbeweis des SK an. Falls die Regel nicht korrekt ist, gib die Ableitung einer nicht gültigen Sequenz als Gegenbeispiel an.

(a) $$\frac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$$

(b) $$\frac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2}$$

(c) $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$$

(d) $$\frac{\Gamma, \exists x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma, \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \exists x\, .\varphi(x)}$$

Aufgabe 3: 20%

Sei Γ eine (potentiall unendliche) Menge von FO-Sätzen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Γ ist gültig gdw. jede endliche Teilmenge $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ gültig ist;

(b) Γ ist unerfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ unerfüllbar ist;

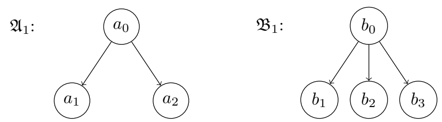
(c) Wenn Γ ein Modell hat, dann auch ein unendliches Modell;

(d) Wenn Γ ein Modell hat, dann auch ein endliches oder abzählbar unendliches Modell.

Aufgabe 4: 24%

Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

(a)



(b) $\mathfrak{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ und $\mathfrak{B}_2 = (2^{\{0,1\}}, \subseteq)$ (gemeint sind jeweils die Potenzmengen)

(c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$.

Aufgabe 5: 24% (Zusatzaufgabe)

Sei τ eine fixe endliche Signatur. Im folgenden sollen alle Strukturen und Sätze stets die Signatur τ verwenden.

(a) Zeige, dass die Menge aller endlichen Strukturen rekursiv aufzählbar ist.

(b) Verwende (a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.

(c) Verwende Trakhtenbrots Theorem, um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Menge der FO-Sätze rekursiv aufzählbar ist.