Teil I: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

Teil II: Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

§ 2. Nachweis der Nichterkennbarkeit

Nachweis der Erkennbarkeit:

konstruiere einen endlichen Automaten (NEA, DEA) für die Sprache.

Nachweis der Nichterkennbarkeit:

schwieriger, da man beweisen muß, daß es keinen endlichen Automaten für die Sprache geben kann.

Generelle Idee:

Verwende, dass DEAs / NEAs nur endlich viele Zustände haben dürfen.
Finde darauf basierende Eigenschaft, die jede erkennbare Sprache erfüllt.
Weise dann nach, dass die betreffende Sprache die Eigenschaft verletzt.

Beispiel 2.1 (eine nicht erkennbare Sprache)

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

Angenommen, es gibt doch NEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Dann hat $\mathcal{A}$ endlich viele Zustände, sagen wir n_0 Stück.

Wir betrachten beliebiges Wort $w = a^n b^n \in L$ mit $|w| \geq n_0$:

$$\underset{q_0}{} \underbrace{aaaaaaaaaaaaaaaaa}_{x} \underset{q}{} \underbrace{aaaabb}_{y} \underset{q}{} \underbrace{bbbbbbbbbbbbbbbbbbb}_{z} \underset{q_f \in F}{}$$

Es gilt also Pfad

$$q_0 \xRightarrow{x}_{\mathcal{A}} q \xRightarrow{y}_{\mathcal{A}} q \xRightarrow{z}_{\mathcal{A}} q_f$$

und damit auch

$$q_0 \xRightarrow{x}_{\mathcal{A}} q \xRightarrow{y}_{\mathcal{A}} qq \xRightarrow{y}_{\mathcal{A}} q \xRightarrow{z}_{\mathcal{A}} q_f$$

Also enthält $L(\mathcal{A})$ Wort der Form $a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} b^{k_4}$ mit $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$. $\lightning$

Beispiel 2.1 (eine nicht erkennbare Sprache)

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

Angenommen, es gibt doch NEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Dann hat $\mathcal{A}$ endlich viele Zustände, sagen wir n_0 Stück.

Wir betrachten beliebiges Wort $w = a^n b^n \in L$ mit $|w| \geq n_0$:

$$\underset{q_0}{}\underbrace{aaaaaaaaaaaaaaaaa}_{x}\underset{q}{}\underbrace{aaaabb}_{y}\underset{q}{}\underbrace{bbbbbbbbbbbbbbbbbbb}_{z}\underset{q_f \in F}{}$$

Zweiter Fall:

Beispiel 2.1 (eine nicht erkennbare Sprache)

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

Angenommen, es gibt doch NEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Dann hat $\mathcal{A}$ endlich viele Zustände, sagen wir n_0 Stück.

Wir betrachten beliebiges Wort $w = a^n b^n \in L$ mit $|w| \geq n_0$:

$$\underbrace{aaaaaaaaaaaa}_{q_0 \qquad x}\,\underbrace{aaaaaa}_{q \quad y}\,\underbrace{aabbbbbbbbbbbbbbbbbbb}_{q \qquad z \qquad q_f \in F}$$

Zweiter Fall: $$q_0 \stackrel{x}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \stackrel{y}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \stackrel{z}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f \qquad \text{mit } s > 0$$

und damit auch $$q_0 \stackrel{x}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \stackrel{z}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f$$

Also gibt es m, ℓ mit $m < \ell$ so dass $a^m b^\ell \in L(\mathcal{A})$. $\lightning$

Beispiel 2.1 (eine nicht erkennbare Sprache)

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

Angenommen, es gibt doch NEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Dann hat $\mathcal{A}$ endlich viele Zustände, sagen wir n Stück.

Wir betrachten beliebiges Wort $w = a^n b^n$ mit $|w| > k$:

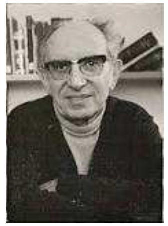
$$
\begin{array}{llll}
aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa & bbbbbbbbbbbbbbbbbbb & & \\
q_0 & q & q & q_f \in F
\end{array}
$$

Dritter Fall:

Führt analog zu m, ℓ mit $m > \ell$ so dass $a^m b^\ell \in L(\mathcal{A}) = L$.

Alle möglichen Fälle führen zum Widerspruch!!

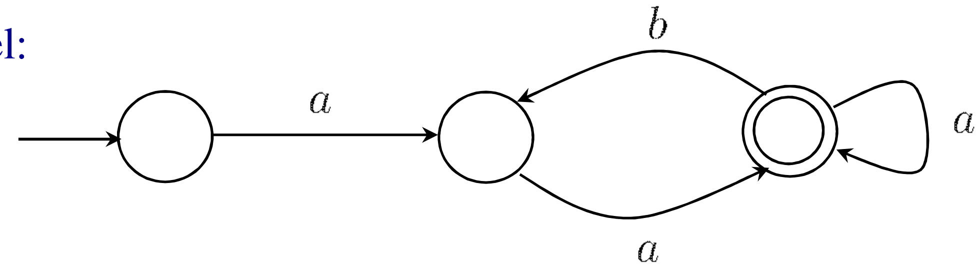
Also war die Annahme falsch, dass L erkennbar ist!



Lemma 2.2 (Pumping-Lemma: einfache Version) [Bar-Hillel,Perles,Shamir]

> Sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so daß gilt:
>
> Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ läßt sich zerlegen in $w = xyz$ mit
>
> - $y \neq \varepsilon$
> - $xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

Beispiel:



Wähle $n_0 = 3$ (Zahl der Zustände!)

Als Beispiel für Wort in L mit Länge $\geq n_0$ betrachte $\underbrace{a\ a}_{x}\ \underbrace{b\ a}_{y}\ \underbrace{a}_{z}$

$$xy^0z = aaa, \quad xy^1z = aabaa, \quad xy^2z = aababaa, \text{ etc.}$$

Beispiel 2.3 (Anwendung Pumping Lemma)

> $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, L sei erkennbar.

Es gibt also Zahl n_0, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ wie in Lemma 2.2 zerlegen lässt.

Betrachte das Wort $w = a^{n_0} b^{n_0} \in L$.

Da $|w| \geq n_0$, muss es eine Zerlegung geben

$$a^{n_0} b^{n_0} = xyz \qquad \text{mit } y \neq \varepsilon \text{ und } xy^k z \in L \text{ für alle } k \geq 0.$$

Unterscheide drei Fälle, wie ein solche Zerlegung aussehen könnte:

aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaabbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb

y — 2. Fall | y — 1. Fall | y — 3. Fall

In jedem Fall finden wir k mit $xy^k z \notin L$ (Beispiel 2.1), also Annahme falsch!

Lemma 2.4 (Pumping-Lemma als Kontrapositiv)

Angenommen, für eine Sprache L gilt das folgende:

für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$

  gibt es ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ so dass

    für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ gilt:

      es gibt $k \geq 0$ mit $xy^kz \notin L$.

Dann ist L nicht erkennbar.

Diese Formulierung legt spieltheoretische Sicht nahe:

- Man spielt in Runden gegen einen Gegner
  Gegner will zeigen: Sprache ist erkennbar; wir wollen Gegenteil zeigen
- bei "für alle" ist der Gegner dran, bei "es gibt" man selbst
- wenn man das Spiel stets gewinnen kann, egal was der Gegner tut,
  dann ist Eigenschaft aus Lemma 2.4 erfüllt, also L nicht erkennbar.

Beispiel 2.5

$L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt n_0

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen a^m mit $m = {n_0}^2$

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$": Gegner wählt xyz

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $xy^kz \notin L$":

Betrachte zunächst den Fall, dass $x = z = \varepsilon$.

Wir wählen $k = |w| - 1 = m - 1$.

Dann ist $|xy^kz| = m \cdot (m-1)$ keine Quadratzahl:

$$(m-1)^2 \; < \; m \cdot (m-1) \; < \; m^2.$$

In diesem Fall gewinnen wir also das Spiel!

Beispiel 2.5

$L = \{a^n \mid n$ ist Quadratzahl$\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt n_0

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen a^m mit $m = {n_0}^2$

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$": Gegner wählt xyz

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $xy^kz \notin L$":

Es bleibt der Fall $xz \neq \varepsilon$.

Idee:
wir pumpen y so, dass Wortlänge $s^2 + t$ für geeignete s, t mit $0 < t < s$

So eine Zahl kann niemals Quadratzahl sein:

$$s^2 \;<\; s^2 + t \;<\; (s+1)^2 \qquad\qquad (=\; s^2 + 2s + 1)$$

Beispiel 2.5

$L = \{a^n \mid n$ ist Quadratzahl$\}$ ist nicht erkennbar.

Beweis:

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt n_0

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen a^m mit $m = {n_0}^2$

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$": Gegner wählt xyz

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $xy^kz \notin L$":

Wir pumpen y so, dass Wortlänge $s^2 + t$ für geeignete s, t mit $0 < t < s$

Wähle $k = 4 \cdot |y| \cdot |w|^2$

Dann $|xy^kz| \;=\; |y| \cdot k + \underbrace{|x| + |z|}_{= t} \;=\; \underbrace{4 \cdot |y|^2 \cdot |w|^2}_{s = 2 \cdot |y| \cdot |w|} + t \;=\; s^2 + t$

Es gilt $0 < t < s$, Also $xy^kz \notin L$ und wir gewinnen das Spiel!

Das eben formulierte Pumping Lemma ist nützlich, um Nicht-erkennbarkeit nachzuweisen.

Es kann aber nicht immer verwendet werden:

Es gibt Sprachen, die nicht erkennbar sind,
aber die Eigenschaft dieses Lemmas trotzdem erfüllen.

Die formulierte Eigenschaft ist also notwendig für Erkennbarkeit,
aber nicht hinreichend

Beispiel 2.6 (eine nicht erkennbare Sprache, die Lemma 2.2 erfüllt)

$$\boxed{L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}}$$

Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.2 zu zeigen, so scheitert man

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt $n_0 = 3$

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen schlaues $w = a^n b^m$

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$":

1. Fall: $n > m$ (es gibt mehr as als bs)

Fall 1.1: $n > m + 1$ (es gibt mind. 2 as mehr als bs)

Gegner wählt $x = \varepsilon$, $y = a$, $z =$ Restwort

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $xy^kz \notin L$":

xy^iz: mind. ein a mehr als b's, also alle in L (auch $i = 0$)

Beispiel 2.6 (eine nicht erkennbare Sprache, die Lemma 2.2 erfüllt)

$$\boxed{L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}}$$

Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.2 zu zeigen, so scheitert man

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt $n_0 = 3$

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen ein schlaues w

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$":

1. Fall: $n > m$ (es gibt mehr as als bs)

Fall 1.2: $n > m + 1$ (es gibt genau ein a mehr als bs)

Gegner wählt $x = \varepsilon$, $y = aa$, $z =$ Restwort (geht wegen $|w| > n_0$)

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $xy^k z \notin L$":

$xy^0 z$: ein a weniger als b's

$xy^i z$ mit $i \geq 1$: mind. ein a mehr als b's

Beispiel 2.6 (eine nicht erkennbare Sprache, die Lemma 2.2 erfüllt)

$$\boxed{L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}}$$

Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.2 zu zeigen, so scheitert man

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt $n_0 = 3$

"gibt es Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$": Wir wählen ein schlaues w

"so dass für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$":

2. Fall: $n < m$ (es gibt mehr bs als as)

Der Gegner kann symmetrisch zu Fall 1 vorgehen und gewinnen

Wir verlieren also in jedem Fall, der Gegner hat Gewinnstrategie!

Wir konnten (auf diese Weise) also nicht zeigen, dass L nicht erkennbar ist!

Lemma 2.7 (Pumping-Lemma: verschärfte Version)

Es sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so daß gilt:

Für alle Wörter $\widehat{w} \in L$ und Zerlegungen $\widehat{w} = uvw$ und $|v| \geq n_0$ gibt es eine Zerlegung $v = xyz$ mit

- $y \neq \varepsilon$
- $uxy^k zw \in L$ für alle $k \geq 0$.

Vorteil dieses Lemmas beim Nachweis der Nichterkennbarkeit?

Vorher musste man die Zerlegbarkeit von w zum Widerspruch führen.

Nun kann man zusätzlich ein Teilwort wählen und dessen Zerlegbarkeit zum Widerspruch führen.

Beweis wie vorher, nun alles innerhalb von Teilwort v.

Lemma 2.8 (Verschärftes Pumping-Lemma als Kontrapositiv)

Angenommen, für eine Sprache L gilt das folgende:

für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$

gibt es ein Wort $\widehat{w} \in L$ und Zerlegung $\widehat{w} = uvw$ mit $|v| \geq n_0$ so dass

für alle Zerlegungen $v = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ gilt:

es gibt $k \geq 0$ mit $uxy^kzw \notin L$.

Dann ist L nicht erkennbar.

Beispiel 2.6 (Fortsetzung)

$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ ist nicht erkennbar.

"für alle natürlichen Zahlen $n_0 \geq 1$": Gegner wählt n_0

"gibt es $\widehat{w} \in L$ und Zerlegung $\widehat{w} = uvw$ mit $|v| \geq n_0$":

Wir wählen $a^{n_0} b^{n_0!+n_0} \in L$ und Zerlegung $u := \varepsilon,\ v := a^{n_0},\ w := b^{n_0!+n_0}$

"so dass für alle Zerlegungen $v = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$": Gegner wählt xyz

"gilt: es gibt $k \geq 0$ mit $uxy^kzw \notin L$":

Sei $x = a^{k_1}, \quad y = a^{k_2}, \quad z = a^{k_3}$ wobei $k_1 + k_2 + k_3 = n_0$ und $k_2 > 0$

Offenbar existiert ein ℓ mit $\ell \cdot k_2 = n_0!$ (da $0 < k_2 \leq n_0$).

Wir wählen $k = \ell + 1$. Die Anzahl as im Wort $uxy^{\ell+1}zw$ ist

$$k_1 + (\ell + 1)k_2 + k_3 = k_1 + k_2 + k_3 + (\ell \cdot k_2) = n_0 + n_0!$$

und die Anzahl von bs ebenso, das Wort ist also nicht in L.

Damit gewinnen wir das Spiel!

Zusammenfassung:

- Pumping Lemma ist wichtiges Werkzeug zum Nachweis der Nichterkennbarkeit

  (es kann aber nicht verwendet werden, um zu zeigen, dass Sprache erkennbar ist!!)

- Bequem ist die Betrachtungsweise als Kontrapositiv und Spiel

- Die Methode ist jedoch kein Automatismus, erfordert Kreativität.

- Es gibt verschieden starke Versionen des Pumping Lemmas

  (auch die zuletzt gesehene kann noch weiter verstärkt werden)

Eine wichtige Intuition ist:

Sprachen, deren Erkennen unbeschränktes Zählen erfordert, sind nicht erkennbar.