Universität Bremen

AG Theoretische Grundlagen der KI, Fachbereich Informatik, Universität Bremen

Skript zu den Lehrveranstaltungen

Theoretische Informatik 1 + 2

Prof. Dr. Carsten Lutz

Inhaltsverzeichnis

Einführung **5**

I. Endliche Automaten und Reguläre Sprachen **10**
0. Grundbegriffe 10
1. Endliche Automaten 14
2. Nachweis der Nichterkennbarkeit 26
3. Abschlusseigenschaften und Entscheidungsprobleme 29
4. Reguläre Ausdrücke und Sprachen 37
5. Minimale DEAs und die Nerode-Rechtskongruenz 41

II. Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten **52**
6. Die Chomsky-Hierarchie 53
7. Rechtslineare Grammatiken und reguläre Sprachen 58
8. Normalformen und Entscheidungsprobleme 61
9. Abschlusseigenschaften und Pumping Lemma 70
10. Kellerautomaten 74

III. Berechenbarkeit **86**
11. Turingmaschinen 89
12. Zusammenhang zwischen Turingmaschinen und Grammatiken 100
13. LOOP-Programme und WHILE-Programme 106
14. Primitiv rekursive Funktionen und μ-rekursive Funktionen 115
15. Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit 121
16. Universelle Maschinen und unentscheidbare Probleme 125
17. Weitere unentscheidbare Probleme 134

IV. Komplexität **140**
18. Einige Komplexitätsklassen 141
19. NP-vollständige Probleme 147
20. Jenseits von NP 158

V. Appendix **159**
A. Laufzeitanalyse von Algorithmen und O-Notation 159
B. Aussagenlogik 162

Abkürzungsverzeichnis **169**

Literatur **175**

Hinweise

Dieses Skript ist als Hilfestellung für Studierende gedacht. Trotz großer Sorgfalt beim Erstellen kann keine Garantie für Fehlerfreiheit übernommen werden. Es wird explizit darauf hingewiesen, dass der prüfungsrelevante Stoff durch die Vorlesung bestimmt wird und mit dem Skriptinhalt nicht vollständig übereinstimmen muss.

Dieses Skript ist eine erweiterte und modifizierte Version eines Vorlesungsskriptes von Franz Baader.

Inhalte, die zwar in der Vorlesung verwendet werden, aber nicht primärer Betrachtungsgegenstand sind, finden sich im Appendix. Bei Schwierigkeiten mit der mathematischen Notation mag das Abkürzungsverzeichnis und das Verzeichnis der mathematischen Symbole und Notation helfen.

Einführung

Die theoretische Informatik beschäftigt sich mit grundlegenden Fragestellungen der Informatik wie etwa den prinzipiellen Grenzen der Berechenbarkeit. Die geschieht mittels Abstraktion und Modellbildung, d.h. es werden die zentralen Konzepte und Methoden der Informatik identifiziert und in abstrakter Form beschrieben und analysiert. Daraus ergibt sich eine Sammlung mathematischer Theorien, die eine wichtige Grundlage für zahlreiche andere Teilgebiete der Informatik bildet.

Die theoretische Informatik ist in zahlreiche Teilgebiete untergliedert, wie etwa die Komplexitätstheorie, die Algorithmentheorie, die Kryptographie und die Datenbanktheorie. Die Lehrveranstaltungen „Theoretische Informatik 1 + 2 “ geben eine Einführung in die folgende zwei Gebiete:

Automatentheorie und formale Sprachen

Behandelt in Theoretische Informatik 1 / Teile I + II dieses Skriptes

Im Mittelpunkt stehen *Wörter* und *formale Sprachen* (Mengen von Wörtern). Diese sind ein nützliches Abstraktionsmittel der Informatik. Man kann beispielsweise eine konkrete Eingabe für ein Programm als ein Wort dastellen und die Menge aller syntaktisch korrekten Eingaben als eine formale Sprache. Auch ein Programm selbst läßt sich als Wort beschreiben und die Menge aller wohlgeformten Programme ist dann eine formale Sprache. Wichtige Fragestellungen sind in diesem Gebiet unter anderem:

- Was sind geeignete Beschreibungsmittel für (meist unendliche) formale Sprachen? (z.B. Automaten und Grammatiken)
- Was für verschiedene Typen von Sprachen lassen sich unterscheiden?
- Welche Eigenschaften haben die verschiedenen Sprachtypen?
- Was sind die relevanten Berechnungsprobleme für formale Spachen und wie kann man sie algorithmisch lösen?

Berechenbarkeit und Komplexität

Behandelt in Theoretische Informatik 2 / Teile III + IV dieses Skriptes

Hier geht es darum, welche Berechnungsprobleme und Funktionen berechenbar sind und welche nicht. Ausserdem wird untersucht, welcher zeitliche Aufwand zur Berechnung notwendig ist, wodurch einfach zu berechnende Probleme von inhärent[1] schwierig zu berechnenden Problemen unterschieden werden können. Wichtige Fragestellungen sind z.B.:

- Was für Berechenbarkeitsmodelle gibt es und wie verhalten sich diese zueinander?
- Gibt es Funktionen oder Mengen, die prinzipiell nicht berechenbar sind?
- Kann man jede berechenbare Funktion mit akzeptablem Zeit- und Speicherplatzaufwand berechnen?
- Für in der Informatik häufig auftretende Probleme/Funktionen: wie viel Zeit und Speicherplatz braucht man mindestens, also bei optimalem Algorithmus?

[1] Das soll heißen: auch bei Verwendung des bestmöglichen Algorithmus.

Teil I + II: Automatentheorie und formale Sprachen

Formale Sprachen, also (endliche oder unendliche) Mengen von Wörtern, sind ein wichtiger Abstraktionsmechanismus der Informatik. Hier ein paar Anwendungsbeispiele:

- Die Menge aller wohlgeformten Programme in einer gegebenen Programmiersprache wie Pascal, Java oder C++ ist eine formale Sprache.
- Die Menge aller wohlgeformten Eingaben für ein Programm ist eine formale Sprache.
- Die Menge aller wohlgeformten Eingaben für ein Eingabefeld auf einer Webseite ist eine formale Sprache (z.B. Menge aller Kontonummern / Menge aller Geburtsdaten).
- Jeder Suchausdruck (z.B. eine Regular Expression in Linux) definiert eine formale Sprache: die Menge der Dokumente, in der der Ausdruck zu finden ist.
- Kommunikationsprotokolle: die Menge aller wohlgeformten TCP-Pakete kann als eine formale Sprache betrachtet werden.
- Das "erlaubte Verhalten" von Soft- und Hardwaresystemen kann in sehr natürlicher Weise als formale Sprache modelliert werden.

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die zentralen Betrachtungsgegenstände und Fragestellungen.

1. **Charakterisierung**:

   Nützliche und interessante formale Sprachen sind i.d.R. unendlich. Dies ist auch in den obigen Beispielen der Fall, denn es gibt zum Beispiel unendlich viele wohlgeformte Pascal-Programme. Die Frage ist nun: Wie beschreibt man derartige Sprachen mit endlichem Aufwand? Wir betrachten folgende Möglichkeiten.

   - *Automaten* oder *Maschinen*, die genau die Elemente der Menge akzeptieren. Wir werden viele verschiedene Automatenmodelle kennenlernen, wie z.B. endliche Automaten, Kellerautomaten und Turingmaschinen.
   - *Grammatiken*, die genau die Elemente der Menge generieren; auch hier gibt es viele verschiedene Typen, z.B. rechtslineare Grammatiken und kontextfreie Grammatiken (vgl. auch VL „Praktische Informatik": kontextfreie Grammatiken (EBNF) zur Beschreibung der Syntax von Programmiersprachen).

- *Ausdrücke*, die beschreiben, wie man die Sprache aus Basissprachen mit Hilfe gewisser Operationen (z.B. Vereinigung) erzeugen kann.

In Abhängigkeit von dem jeweils verwendeten Automaten- oder Grammatiktyp erhält man verschiedene Klassen von Sprachen. Wir werden hier die vier wichtigsten Klassen betrachten, die in der **Chomsky-Hierarchie** zusammengefasst sind:

Klasse	Automatentyp	Grammatiktyp
Typ 0	Turingmaschine (TM)	allgemeine Chomsky-Grammatik
Typ 1	TM mit linearer Bandbeschränkung	kontextsensitive Grammatik
Typ 2	Kellerautomat	kontextfreie Grammatik
Typ 3	endlicher Automat	einseitig lineare Grammatik

Für Sprachen vom Typ 3 existiert zusätzlich eine Beschreibung durch reguläre Ausdrücke. Am wichtigsten sind die Typen 2 und 3; beispielsweise kann Typ 2 weitgehend die Syntax von Programmiersprachen beschreiben.

2. Was sind die relevanten **Berechnungsprobleme für formale Sprachen** und wie sind sie algorithmisch lösbar? Die folgenden Probleme werden eine zentrale Rolle spielen:

   - *Wortproblem*: gegeben eine Beschreibung der Sprache L (z.B. durch einen Automat, eine Grammatik, einen Ausdruck, ...) und ein Wort w. Gehört w zu L?

     Anwendungsbeispiele:

     – Programmiersprache, deren Syntax durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben ist. Entscheide für ein gegebenes Programm P, ob dieses syntaktisch korrekt ist.

     – Suchpattern für Textdateien sind häufig reguläre Ausdrücke. Suche die Dateien (Wörter), die das Suchpattern enthalten (zu der von dem Pattern beschriebenen Sprache gehören).

   - *Leerheitsproblem*: gegeben eine Beschreibung der Sprache L. Ist L leer?

     Anwendungsbeispiel:
     Wenn ein Suchpattern die leere Sprache beschreibt, so muss man die Dateien nicht durchsuchen, sondern kann ohne weiteren Aufwand melden, dass das Pattern nicht sinnvoll ist.

   - *Äquivalenzproblem*: Beschreiben zwei verschiedene Beschreibungen dieselbe Sprache?

     Anwendungsbeispiel:
     Jemand vereinfacht die Grammatik einer Programmiersprache, um sie übersichtlicher zu gestalten. Beschreibt die vereinfachte Grammatik wirklich dieselbe Sprache wie die ursprüngliche?

3. Welche **Abschlusseigenschaften** hat eine Sprachklasse?

   z.B. Abschluss unter Durchschnitt, Vereinigung und Komplement: wenn L_1, L_2 in der Sprachklasse enthalten, sind es dann auch der Schnitt $L_1 \cap L_2$, die Vereinigung $L_1 \cup L_2$, das Komplement $\overline{L_1}$?

   Anwendungsbeispiele:

   - Suchpattern: Suche nach Dateien, die das Pattern *nicht* enthalten (Komplement) oder die zwei gewünschte Pattern enthalten (Schnitt).
   - Reduziere das Äquivalenzproblem auf das Leerheitsproblem, ohne die gewählte Klasse von Sprachen zu verlassen: Statt „$L_1 = L_2$?“ direkt algorithmisch zu entscheiden, prüft man, ob $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1})$ leer ist. Man löst also das Äquivalenzproblem mittels eines Algorithmus für das Leerheitsproblem.

Abgesehen von ihrer direkten Nützlichkeit für verschiedene Informatik-Anwendungen stellen sich alle diese Fragestellungen als mathematisch sehr interessant heraus. Zusammengenommen bilden Sie eine wichtige formale Grundlage der Informatik.

I. Endliche Automaten und Reguläre Sprachen

0. Grundbegriffe

Die grundlegenden Begriffe der Vorlesung "Theoretische Informatik 1" sind *Wörter* und *formale Sprachen*.

Wörter und Formale Sprachen

Alphabet. Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Symbolen. Beispiele sind:

- $\Sigma_1 = \{a, b, c, \ldots, z\}$
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_3 = \{0, \ldots, 9\} \cup \{,\}$
- $\Sigma_4 =$ { program, const, var, label, procedure, function, type, begin, end, if, then, else, case, of, repeat, until, while, do, for, to } $\cup$ { VAR, VALUE, FUNCTION }

Alphabetssymbole bezeichnen wir in der Regel mit a, b, c. Alphabete bezeichnen wir meist mit Σ.

Obwohl die Symbole von Σ_4 aus mehreren Buchstaben der üblichen Schriftsprache bestehen, betrachten wir sie hier als unteilbar. Die Symbole von Σ_4 sind genau die Schlüsselwörter der Programmiersprache Pascal. Konkrete Variablennamen, Werte und Funktionsaufrufe sind zu den Schlüsselworten VAR, VALUE, FUNCTION abstrahiert, um die gewünschte Endlichkeit des Alphabetes zu gewährleisten.

Wort. Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Symbolen. Ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$ heißt Wort *über dem Alphabet* Σ. Beispiele sind:

- $w = abc$ ist ein Wort über Σ_1.
- $w = 1000110$ ist ein Wort über Σ_2.
- $w =, , , 10, 0221, 4292, ,$ ist ein Wort über Σ_3.
- Jedes Pascalprogramm kann als Wort über Σ_4 betrachtet werden, wenn man jede konkrete Variable durch das Schlüsselwort VAR ersetzt, jeden Wert durch VALUE und jeden Funktionsaufruf durch FUNCTION.

Wörter bezeichnen wir meist w, v, u. Die Länge eines Wortes w wird mit $|w|$ bezeichnet, es gilt also z.B. $|aba| = 3$. Manchmal ist es praktisch, auch die Anzahl der Vorkommen eines Symbols a in einem Wort w in kurzer Weise beschreiben zu können. Wir verwenden hierfür $|w|_a$, es gilt also z.B. $|aba|_a = 2$, $|aba|_b = 1$, $|aba|_c = 0$. Einen Spezialfall stellt das *leere Wort* dar, also die leere Folge von Symbolen. Dieses wird durch ε bezeichnet. Es ist das einzige Wort mit $|w| = 0$.

Formale Sprache. Eine *(formale) Sprache* ist eine Menge von Wörtern. Mit Σ^* bezeichnen wir die Sprache, die aus *allen* Wörtern über dem Alphabet Σ bestehen, also z.B.

$$\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}.$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *Sprache über dem Alphabet* Σ. Beispiele sind:

- $L = \emptyset$
- $L = \{abc\}$
- $L = \{a, b, c, ab, ac, bc\}$
- $L = \{w \in \{a, \dots, z\}^* \mid w \text{ ist ein Wort der deutschen Sprache }\}$
- L als Menge aller Worte über Σ_4, die wohlgeformte Pascal-Programme beschreiben

Sprachen bezeichnen wir meist mit L. Man beachte, dass Sprachen sowohl endlich als auch unendlich sein können. Interessant sind für uns meist nur unendliche Sprachen. Als nützliche Abkürzung führen wir Σ^+ für die Menge $\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ aller nicht-leeren Wörter über Σ ein. Sowohl Σ^* als auch Σ^+ sind offensichtlich unendliche Sprachen.

Operationen auf Sprachen und Wörtern

Im folgenden werden wir sehr viel mit Wörtern und formalen Sprachen umgehen. Dazu verwenden wir in erster Linie die folgenden Operationen.

Präfix, Suffix, Infix: Zu den natürlichsten und einfachsten Operationen auf Wörtern gehört das Bilden von Präfixen, Suffixen und Infixen:

$$\begin{array}{lll} u \text{ ist Präfix von } v & \text{wenn} & v = uw \text{ für ein } w \in \Sigma^*. \\ u \text{ ist Suffix von } v & \text{wenn} & v = wu \text{ für ein } w \in \Sigma^*. \\ u \text{ ist Infix von } v & \text{wenn} & v = w_1 u w_2 \text{ für } w_1, w_2 \in \Sigma^*. \end{array}$$

Die Präfixe von *aabbcc* sind also beispielsweise $\varepsilon, a, aa, aab, aabb, aabbc, aabbcc$. Dieses Wort hat 21 Infixe (Teilwörter).

Konkatenation: Eine Operation, die auf Wörter und auch auf Sprachen angewendet werden kann. Auf Wörtern u und v bezeichnet die Konkatenation $u \cdot v$ das Wort uv, das man durch einfaches "Hintereinanderschreiben" erhält. Es gilt also z.B. $abb \cdot ab =$

abbab und $bab \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot bab = bab$. Auf Sprachen bezeichnet die Konkatenation das Hintereinanderschreiben *beliebiger* Worte aus den beteiligten Sprachen:

$$L_1 \cdot L_2 := \{u \cdot v \mid (u \in L_1) \text{ und } (v \in L_2)\}$$

Es gilt also z.B.

$$\{aa, a\} \cdot \{ab, b, aba\} = \{aaab, aab, aaaba, ab, aaba\}.$$

Sowohl auf Sprachen als auch auf Wörtern wird der Konkatenationspunkt häufig weggelassen, wir schreiben also z.B. L_1L_2 statt $L_1 \cdot L_2$.

Man beachte, dass $\emptyset \cdot L = L \cdot \emptyset = \emptyset$. Konkatenation ist assoziativ, es gilt also $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$. Sie ist nicht kommutativ, im allgemeinen gilt also nicht $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.

Um wiederholte Konkatenation desselben Wortes zu beschreiben, verwenden wir folgende Notation: für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und ein $n \geq 0$ bezeichnet w^n das Wort, das wir durch n-malige Konkatenation von w erhalten, also zum Beispiel $(abc)^3 = abcabcabc$. Die Klammerung ist hier wichtig, vergleiche $abc^3 = abccc$. Wir definieren $w^0 = \varepsilon$ für jedes Wort w.

Boolesche Operationen: Es handelt sich um die üblichen Booleschen Mengenoperationen, angewendet auf formale Sprachen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vereinigung} & L_1 \cup L_2 & := & \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\} \\ \text{Durchschnitt} & L_1 \cap L_2 & := & \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\} \\ \text{Komplement} & \overline{L_1} & := & \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ und } w \notin L_1\} \end{array}$$

Vereinigung und Durchschnitt sind sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Kleene-Stern: Der Kleene-Stern bezeichnet die endlich oft iterierte Konkatenation. Gegeben eine Sprache L definiert man zunächst induktiv[1] Sprachen $L^0, L^1, \ldots$ und darauf basierend dann die durch Anwendung des Kleene-Sterns erhaltene Sprache L^*:

$$\begin{array}{rcl} L^0 & := & \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} & := & L^n \cdot L \\ L^* & := & \bigcup_{n \geq 0} L^n \end{array}$$

Für $L = \{a, ab\}$ gilt also z.B. $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$, etc. Offensichtlich ist L^* unendlich gdw. (genau dann, wenn) $L \neq \emptyset$.

[1] Das heißt: die Sprache L^0 wird "direkt" definiert. Die Sprache L_{n+1} wird dann unter Bezugnahme auf die jeweilige "Vorgängersprache" L_n definiert. Auf diese Weise ergeben sich unendlich viele Sprachen $L_0, L_1, \ldots$

Man beachte, dass das leere Wort per Definition *immer* in L^* enthalten ist, unabhängig davon, was L für eine Sprache ist. Manchmal verwenden wir auch die Variante ohne das leere Wort:

$$L^+ := \bigcup_{n \geq 1} L^n = L^* \setminus \{\varepsilon\}.$$

Einige einfache Beobachtungen sind $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, $(L^*)^* = L^*$ und $L^* \cdot L^* = L^*$. Es ist hier wichtig, $\emptyset$ (die leere Sprache), $\{\varepsilon\}$ (die Sprache, die das leere Wort enthält) und ε (das leere Wort) sorgsam auseinander zu halten.

Etwas informeller und kürzer könnte man den Kleene-Stern auch wie folgt definieren:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w \mid \exists u_1, \ldots, u_n \in L : w = u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_n\}.$$

1. Endliche Automaten

Endliche Automaten stellen ein einfaches aber sehr nützliches Mittel zur Beschreibung von formalen Sprachen dar. Manchmal ist es sinnvoll, sie als sehr grobe Abstraktion eines Hardware- oder Softwaresystems aufzufassen. In anderen Fällen betrachtet man sie besser als rein abstraktes Werkzeug zur Definition von formalen Sprachen. Die charakteristischen Merkmale eines endlichen Automaten sind

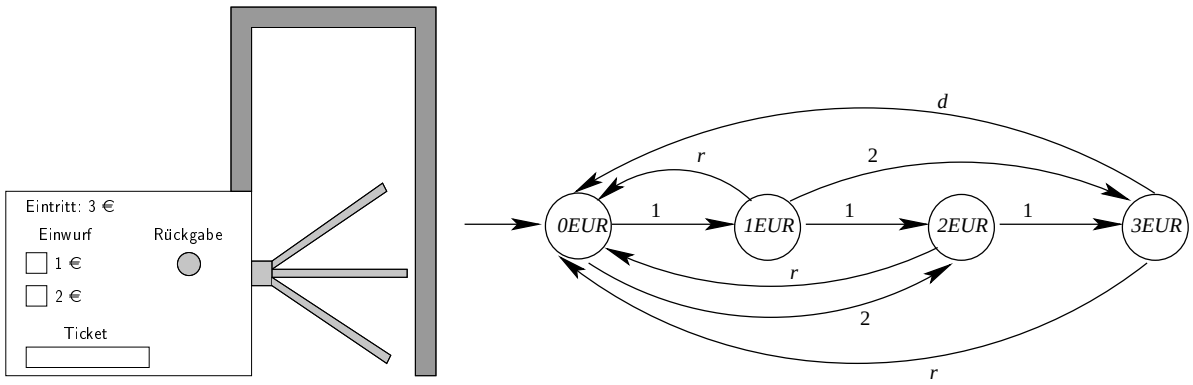
- eine endliche Menge von Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann

  Ein Zustand beschreibt die aktuelle Konfiguration des Systems. In unserem Kontext ist ein Zustand lediglich ein Symbol (also ein Name) wie q_0, q_1, etc. Insbesondere wird nicht näher beschrieben, was genau diesen Zustand ausmacht (etwa eine bestimmte Belegung eines Registers in einem Hardwaresystem mit einem konkreten Wert).

- festen Übergangsregeln zwischen Zuständen in Abhängigkeit von der Eingabe.

  Bei Eingabe eines Eingabesymbols kann der Automat seinen Zustand wechseln. Zustandswechsel werden dabei als augenblicklich angenommen, d.h. ein eventueller Zeitverbrauch wird nicht modelliert. Ein Lauf eines Systems ist also einfach eine Folge von Zuständen.

Beispiel: (Eintrittsautomat)
Eingabe: $1, 2, r, d$ *(r: Geldrückgabe; d: Drehsperre dreht sich)*
Zustände: 0EUR, 1EUR, 2EUR, 3EUR



Der dargestellte Automat regelt eine Drehsperre. Es können Münzen im Wert von 1 oder 2 Euro eingeworfen werden. Nach Einwurf von 3 Euro wird die Arretierung der Drehsperre gelöst und der Eintritt freigegeben. Der Automat gibt kein Wechselgeld zurück sondern nimmt einen zu hohen Betrag nicht an (Münzen fallen durch). Man kann jederzeit den Rückgabeknopf drücken, um den bereits gezahlten Betrag zurückzuerhalten.

In der schematischen Darstellung kennzeichnen die Kreise die internen Zustände und die Pfeile die Zustandsübergänge. Die Pfeilbeschriftung gibt die jeweilige Eingabe an, unter der der Übergang erfolgt. Man beachte, dass

- nur der Zustand 3EUR einen Übergang vom Typ d erlaubt. Dadurch wird modelliert, dass nur durch Einwurf von 3,- Euro der Eintritt ermöglicht wird.
- das Drehen der Sperre als Eingabe angesehen wird. Man könnte dies auch als Ausgabe modellieren. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch keine endlichen Automaten mit Ausgabe (sogenannte Transduktoren) betrachten.

Die Übergänge können als festes Programm betrachtet werden, das der Automat ausführt.

Man beachte den engen Zusammenhang zu formalen Sprachen: die Menge der möglichen Teileingaben $\{1, 2, r, d\}$ bildet ein Alphabet. Jede Gesamteingabe des Automaten ist eine Folge von Symbolen aus diesem Alphabet, also ein Wort. Wenn man 3EUR als Zielzustand betrachtet, so bildet die Menge der Eingaben, mittels derer dieser Zustand erreicht werden kann, eine (unendliche) formale Sprache. Diese enthält zum Beispiel das Wort $11r21$.

Wir definieren endliche Automaten nun formal.

Definition 1.1 (DEA)
Ein *deterministischer endlicher Automat (DEA)* ist von der Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, wobei

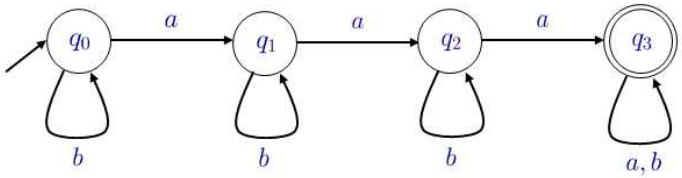
- Q eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
- Σ ein *Eingabealphabet* ist,
- $q_0 \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die *Übergangsfunktion* ist,
- $F \subseteq Q$ eine Menge von *Endzuständen* ist.

Beispiel 1.2
Der DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ mit den Komponenten

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\delta(q_0, a) = q_1, \quad \delta(q_1, a) = q_2, \quad \delta(q_2, a) = \delta(q_3, a) = q_3$

  $\delta(q_i, b) = q_i \quad$ für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $F = \{q_3\}$.

wird graphisch dargestellt als:



Wie im obigen Beispiel werden wir Automaten häufig als kantenbeschriftete Graphen darstellen, wobei die Zustände des Automaten die Knoten des Graphen sind und die Übergänge als Kanten gesehen werden (beschriftet mit einem Alphabetssymbol). Der Startzustand wird durch einen Pfeil gekennzeichnet und die Endzustände durch einen Doppelkreis.

Intuitiv arbeitet der Automat, indem er ein Wort Symbol für Symbol von links nach rechts liest und dabei entsprechend der Übergangsfunktion den Zustand wechselt. Er beginnt im Startzustand und akzeptiert das Eingabewort wenn er sich am Ende in einem Endzustand befindet. Wir beschreiben dieses Verhalten nun formal.

Definition 1.3 (kanonische Fortsetzung von δ)
Die *kanonische Fortsetzung von $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ von Einzelsymbolen auf Wörter*, also auf eine Funktion $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$, wird per Induktion über die Wortlänge definiert:

- $\delta(q, \varepsilon) := q$
- $\delta(q, wa) := \delta(\delta(q, w), a)$

Beachte: für alle Symbole $a \in \Sigma$ und Zustände $q \in Q$ ist die obige Definition von $\delta(q, a)$ identisch mit dem ursprünglichen δ, denn $\delta(q, a) = \delta(\delta(q, \varepsilon), a)$.

Als Beispiel für Definition 1.3 betrachte wieder den Automat $\mathcal{A}$ aus Beispiel 1.6. Es gilt $\delta(q_0, bbbabbbb) = q_1$ und $\delta(q_0, baaab) = q_3$.

Definition 1.4 (Akzeptiertes Wort, erkannte Sprache)
Ein DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$ wenn $\delta(q_0, w) \in F$. Die von $\mathcal{A}$ *erkannte Sprache* ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

Man sieht leicht, dass der Automat $\mathcal{A}$ aus Beispiel 1.6 die Sprache

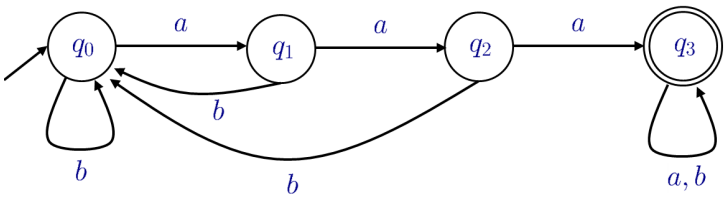
$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \ |w|_a \geq 3\}$$

erkennt. Mit anderen Worten: er akzeptiert genau diejenigen Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$, die mindestens 3 mal das Symbol a enthalten.

Definition 1.5 (Erkennbarkeit einer Sprache)
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *erkennbar*, wenn es einen DEA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

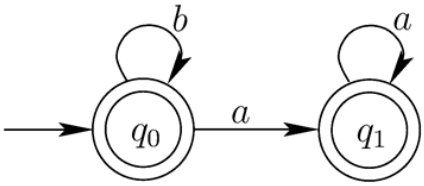
Wir haben also gerade gesehen, dass die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \ |w|_a \geq 3\}$ erkennbar ist. Folgendes Beispiel liefert eine weitere erkennbare Sprache.

Beispiel 1.6
Der folgende DEA erkennt die Sprache $L = \{w = uaaav \mid u, v \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Mit anderen Worten: er akzeptiert genau diejenigen Wörter, die das Teilwort aaa enthalten. Auch diese Sprache ist also erkennbar.



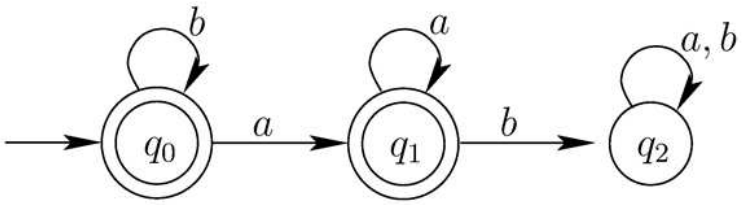
Beachte:
Die Übergangsfunktion eines DEAs ist eine *totale Funktion*, es muß also für *jede mögliche* Kombination von Zustand und Symbol ein Folgesymbol angegeben werden.

Beispiel 1.7
Folgendes ist kein DEA:



denn es fehlt ein Übergang für q_1 und b.

Man erhält aber leicht einen DEA durch Hinzunahme eines „Papierkorbzustandes“, der alle fehlenden Übergänge aufnimmt und *kein* Endzustand ist:



Die im obigen Beispiel erkannte Sprache ist übrigens

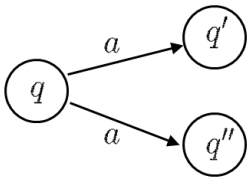
$$L = \{b\}^* \cdot \{a\}^* = \{w \in \{a, b\}^* \mid ab \text{ ist nicht Infix von } w\}.$$

Randbemerkung.
Im Prinzip sind “echte Computer” ebenfalls endliche Automaten: Sie haben nur endlich viel Speicherplatz und daher nur eine endliche Menge möglicher Konfigurationen (Prozessorzustand + Belegung der Speicherzellen + Festplatteninhalt). Die Konfigurationsübergänge werden bestimmt durch Verdrahtung und Eingaben (Tastatur, Peripheriegeräte).

Wegen der extrem großen Anzahl von Zuständen sind endliche Automaten aber keine geeignete Abstraktion für Rechner. Ausserdem verwendet man einen Rechner (z.B. bei der Programmierung) nicht als endlichen Automat indem man etwa ausnutzt, dass der Arbeitsspeicher ganz genau 2GB gross ist. Stattdessen nimmt man den Speicher als potentiell unendlich an und verlässt sich auf Techniken wie Swapping und Paging. In einer geeigneten Abstraktion von Rechnern sollte daher der Speicher als unendlich angenommen werden. Ein entsprechendes Modell ist die Turingmaschine, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Von DEAs zu NEAs

Wir generalisieren nun das Automatenmodell des DEA dadurch, dass wir *Nichtdeterminismus* zulassen. In unserem konkreten Fall bedeutet das, dass wir für einen gegebenen Zustand und ein gelesenes Symbol *mehr als einen möglichen Übergang* erlauben; folgendes ist also möglich:



Ein Automat hat dadurch unter Umständen *mehrere* Möglichkeiten, ein Wort zu verarbeiten. Er akzeptiert seine Eingabe, wenn *eine Möglichkeit existiert*, dabei einen Endzustand zu erreichen.

Nichtdeterminismus ist ein fundamentales Konzept der Informatik, das nicht nur bei endlichen Automaten eine wichtige Rolle spielt. Wir werden es in dieser Vorlesung noch häufiger verwenden. Dabei werden mehrere Möglichkeiten wie oben immer durch *existentielles Quantifizieren* behandelt. Natürlich gibt es in der Realität keine nichtdeterministischen Maschinen. Dannoch ist Nichtdeterminismus aus folgenden Gründen von großer Bedeutung:

- Als Modellierungsmittel bei unvollständiger Information.

  Es ist häufig nicht sinnvoll, Ereignisse wie Benutzereingaben, einkommende Nachrichten von anderen Prozessen usw. im Detail zu modellieren, da man viel zu komplexe Modelle erhalten würde. Stattdessen verwendet man nichtdeterministische Übergänge ohne genauer zu spezifizieren, wann welcher Übergang verwendet wird.

- Große Bedeutung in der Komplexitätstheorie.

  In der Komplexitätstheorie (Theoretische Informatik 2) geht es unter anderem um die prinzipielle Frage, was effizient berechenbar ist und was nicht. Interessanterweise spielt dabei das zunächst praxisfern wirkende Konzept des Nichtdeterminismus eine zentrale Rolle. Paradebeispiel ist das sogenannte "P vs. NP" Problem, das wichtigste ungelöste Problem der Informatik.

NEAs ergeben sich dadurch, dass man die Übergangs*funktion* von DEAs durch eine Übergangs*relation* ersetzt. Wir definieren NEAs der Vollständigkeit halber noch einmal als Ganzes.

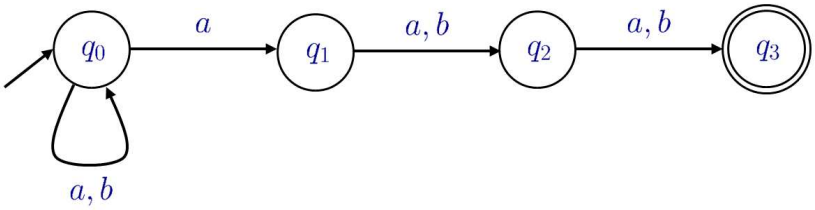
Definition 1.8 (NEA)

Ein *Nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)* ist von der Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,

- Σ ein Eingabealphabet ist,
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ *die Übergangsrelation ist*,
- $F \subseteq Q$ eine Menge von Endzuständen ist.

Beispiel 1.9
Folgenden NEA werden wir im folgenden als durchgängiges Beispiel verwenden:



Dieser Automat ist kein DEA, da es an der Stelle q_0 für die Eingabe a zwei mögliche Übergänge gibt.

Um das Akzeptanzverhalten von NEAs zu beschreiben, verwenden wir eine etwas andere Notation als bei DEAs.

Definition 1.10 (Pfad)
Ein *Pfad* in einem NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ von einem Zustand $p_0 \in Q$ zu einem Zustand $p_n \in Q$ ist eine Folge

$$\pi = p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

so dass $(p_i, a_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Der Pfad hat die *Beschriftung* $w := a_1 \cdots a_n$. Wenn es in $\mathcal{A}$ einen Pfad von p nach q mit der Beschriftung w gibt, so schreiben wir

$$p \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q.$$

Für $n = 0$ sprechen wir vom *leeren Pfad*, welcher die Beschriftung ε hat.

Im NEA aus Beispiel 1.9 gibt es unter anderem folgende Pfade für die Eingabe *aba*:

$$\pi_1 = q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_1 \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} q_2 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_3$$
$$\pi_2 = q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_0 \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_1$$

Wie erwähnt basiert das Akzeptanzverhalten bei Nichtdeterminismus immer auf *existentieller Quantifizierung*.

Definition 1.11 (Akzeptiertes Wort, erkannte Sprache)
Der NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$ wenn $q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f$ für ein $q_f \in F$; mit anderen Worten: wenn *es einen Pfad* $p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$ *gibt* so dass $p_0 = q_0$ und $p_n \in F$. Die von $\mathcal{A}$ *erkannte Sprache* ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

Der NEA aus Beispiel 1.9 akzeptiert also die Eingabe *aba*, weil der oben angegebene Pfad π_1 in einem Endzustand endet. Dabei ist es irrelevant, dass der ebenfalls mögliche Pfad π_2 in einem nicht-Endzustand endet. Nicht akzeptiert wird beispielsweise die Eingabe *baa*, da keiner der möglichen Pfade zu einem Endzustand führt. Man sieht leicht, dass der NEA aus Beispiel 1.9 die folgende Sprache akzeptiert:

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ das drittletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}.$$

Eine gute Hilfe zum Verständnis von Nichtdeterminismus ist die Metapher des *Ratens*. Intuitiv "rät" der NEA aus Beispiel 1.9 im Zustand q_0 bei Eingabe von a, ob er sich gerade an der drittletzten Stelle des Wortes befindet oder nicht. Man beachte, dass der Automat keine Möglichkeit hat, das sicher zu wissen. Wenn er sich für "ja" entscheidet, so wechselt er in den Zustand q_1 und *verifiziert* mittels der Kette von q_1 nach q_3, dass er richtig geraten hat:

- hat er in Wahrheit das zweitletzte oder letzte Symbol gelesen, so wird der Endzustand nicht erreicht und der Automat akzeptiert nicht;
- ist er weiter als drei Symbole vom Wortende entfernt, so ist in q_3 kein Übergang mehr möglich und der Automat "blockiert" und akzeptiert ebenfalls nicht.

Die wichtigsten Eigenschaften eines solchen Rate-Ansatzes zum Erkennen einer Sprache L sind, dass (i) für Wörter $w \in L$ es die Möglichkeit gibt, richtig zu raten und (ii) für Wörter $w \notin L$ falsches Raten niemals zur Akzeptanz führt.

Da wir uns bei einem Automaten meist nur für die erkannten Sprachen interessieren, bezeichnen wir zwei NEAs als *äquivalent*, wenn sie dieselbe Sprache akzeptieren.

Ohne Nichtdeterminismus, also mittels eines DEA, ist es sehr viel schwieriger, die Sprache aus Beispiel 1.9 zu erkennen (Aufgabe!). Es gilt aber interessanterweise, dass man zu jedem NEA einen äquivalenten DEA finden kann. Nichtdeterminismus trägt in diesem Fall also nicht zur Erhöhung der Ausdrucksstärke bei (das ist aber keineswegs immer so, wie wir noch sehen werden). NEAs haben aber dennoch einen Vorteil gegenüber DEAs: manche Sprachen lassen sich im Vergleich zu DEAs mit erheblich (exponentiell) kleineren NEAs erkennen. Letzteres werden wir im Rahmen der Übungen kurz beleuchten. In der Vorlesung beweisen wir lediglich folgendes klassische Resultat.

Satz 1.12 (Rabin/Scott)
Zu jedem NEA kann man einen äquivalenten DEA konstruieren.

Bevor wir den Beweis dieses Satzes angeben, skizzieren wir kurz die

Beweisidee:
Der Beweis dieses Satzes verwendet die bekannte *Potenzmengenkonstruktion*: die Zustandsmenge des DEA ist die Potenzmenge 2^Q der Zustandsmenge Q des NEA. Jeder Zustand des DEA besteht also aus einer *Menge* von NEA-Zuständen; umgekehrt ist jede solche Menge ein DEA-Zustand.

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA. Nach der Definition von NEAs gilt $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. die Menge $\{q \in Q \mid q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q\} \in 2^Q$ mindestens einen Endzustand enthält. Wir definieren also die Übergangsfunktion δ und Endzustandsmenge F' des DEAs so, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

1. $\delta(\{q_0\}, w) = \{q \mid q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q\}$ und
2. $\{q \mid q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q\}$ ist DEA-Endzustand wenn mindestens ein Endzustand des ursprünglichen NEAs enthalten ist.

Intuitiv simuliert damit der eindeutige Lauf des DEAs auf einer Eingabe w *alle* möglichen Läufe des ursprünglichen NEAs auf w.

Beweis. Sei der NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ gegeben. Der DEA $\mathcal{A}' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta, F')$ ist definiert durch:

- $\delta(P, a) = \bigcup_{p \in P} \{p' \mid (p, a, p') \in \Delta\}$ für alle $P \in 2^Q$ und $a \in \Sigma$
- $F' = \{P \in 2^Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$

Wir benötigen im Folgenden die

Hilfsaussage: $q' \in \delta(\{q_0\}, w)$ gdw. $q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q'$ $(\star)$

Daraus folgt $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$, da:

$w \in L(\mathcal{A})$	gdw.	$\exists q \in F : q_0 \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q$	(Def. $L(\mathcal{A})$)
	gdw.	$\exists q \in F : q \in \delta(\{q_0\}, w)$	(Hilfsaussage)
	gdw.	$\delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset$	
	gdw.	$\delta(\{q_0\}, w) \in F'$	(Def. F')
	gdw.	$w \in L(\mathcal{A}')$	

Beweis der Hilfsaussage mittels Induktion über $|w|$:

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$q' \in \delta(\{q_0\}, \varepsilon)$ gdw. $q_0 = q'$ gdw. $q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q'$

Induktionsannahme: Die Hilfsaussage ist bereits gezeigt für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq n$

Induktionsschritt: $|w| = n + 1$

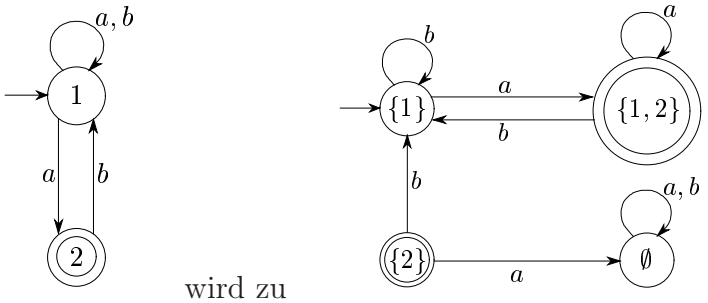
Sei $w = ua$ mit $u \in \Sigma^*$, $|u| = n$ und $a \in \Sigma$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\delta(\{q_0\}, ua) &= \delta(\delta(\{q_0\}, u), a) && \text{(Def. 1.3)} \\
&= \bigcup_{q' \in \delta(\{q_0\}, u)} \{q'' \mid (q', a, q'') \in \Delta\} && \text{(Def. } \delta\text{)} \\
&= \bigcup_{q_0 \overset{u}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q'} \{q'' \mid (q', a, q'') \in \Delta\} && \text{(Ind.Voraus.)} \\
&= \{q'' \mid q_0 \overset{ua}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q''\} && \text{(Def. Pfad)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Hilfsaussage für $w = ua$.

□

Beispiel 1.13
Der NEA $\mathcal{A}$ (links) wird mit der Potenzmengenkonstruktion transformiert in den DEA $\mathcal{A}'$ (rechts):



Nachteilig an dieser Konstruktion ist, dass die Zustandsmenge *exponentiell* vergrößert wird. Im allgemeinen kann man dies wie erwähnt nicht vermeiden, in manchen Fällen kommt man aber doch mit weniger Zuständen aus. Als einfache Optimierung kann man Zustände weglassen, die mit keinem Wort vom Startzustand aus erreichbar sind. In der Übung werden wir eine Methode kennenlernen, die Potenzmengenkonstruktion systematisch so anzuwenden, dass nicht erreichbare Zustände von vorn herein weggelassen werden. Dies reicht allerdings nicht aus, damit der erzeugte Automat so klein wie möglich ist!). Wir werden später eine allgemeine Methode kennenlernen, um zu einer gegebenen erkennbaren Sprachen den kleinstmöglichen DEA zu konstruieren.

Wir betrachten noch zwei natürliche Varianten von NEAs, die sich in manchen technischen Konstruktionen als sehr nützlich herausstellen. Wir werden sehen, dass sie dieselben Sprachen erkennen können wie NEAs.

Definition 1.14 (NEA mit Wortübergängen, ε-NEA)
Ein *NEA mit Wortübergängen* hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$, wobei Q, Σ, q_0, F wie beim NEA definiert sind und $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ eine endliche Menge von *Wortübergängen* ist.
Ein *ε-NEA* ist ein NEA mit Wortübergängen der Form (q, ε, q') und (q, a, q') mit $a \in \Sigma$.

Pfade, Pfadbeschriftungen und erkannte Sprache werden entsprechend wie für NEAs definiert. Zum Beispiel hat der Pfad

$$q_0 \xrightarrow{ab}_{\mathcal{A}} q_1 \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} q_2 \xrightarrow{bb}_{\mathcal{A}} q_3$$

die Beschriftung $ab \cdot \varepsilon \cdot bb = abbb$.

Man beachte, dass $q \overset{a}{\Longrightarrow} p$ bedeutet, dass man von q nach p kommt, indem man zunächst beliebig viele ε-Übergänge macht, dann einen a-Übergang und danach wieder beliebig viele ε-Übergänge (im Unterschied zu $q \xrightarrow{a} p$).

Satz 1.15
Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man einen äquivalenten NEA konstruieren.

Man zeigt Satz 1.15 mit Umweg über ε-NEAs.

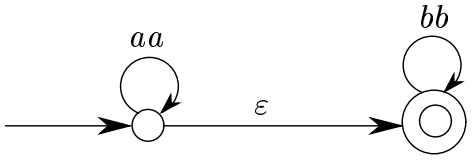
Lemma 1.16

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man einen äquivalenten ε-NEA konstruieren.

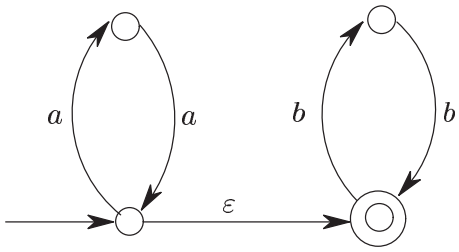
Beweis. Man ersetzt jeden Wortübergang $(q, a_1 \cdots a_n, q')$ mit $n > 1$ durch Symbolübergänge $(q, a_1, p_1), (p_1, a_2, p_2), \ldots, (p_{n-1}, a_n, q')$, wobei $p_1, \ldots, p_{n-1}$ jeweils neue Hilfszustände sind (die nicht zur Endzustandsmenge dazugenommen werden). Man sieht leicht, dass dies einen äquivalenten ε-NEA liefert. □

Beispiel 1.17

Der NEA mit Wortübergängen, der durch die folgende Darstellung gegeben ist:



wird überführt in einen äquivalenten ε-NEA:



Lemma 1.18

Zu jedem ε-NEA kann man einen äquivalenten NEA konstruieren.

Beweis. Der ε-NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ sei gegeben. Wir konstruieren daraus einen NEA $\mathcal{A}'$ ohne ε- Übergänge wie folgt:

$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, \Delta', F')$, wobei

- $\Delta' := \left\{ (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid p \overset{a}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \right\}$
- $F' := \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{falls} \quad q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_f \text{ für ein } q_f \in F \\ F & \text{sonst} \end{cases}$

Wir zeigen, dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

1. $L(\mathcal{A}') \subseteq L(\mathcal{A})$:
   Sei $w = a_1 \cdots a_n \in L(\mathcal{A}')$. Dann gibt es einen Pfad

   $$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}'} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}'} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}'} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}'} p_n \quad \text{mit} \quad p_0 = q_0,\ p_n \in F'.$$

   Nach Definition von Δ' gibt es auch in $\mathcal{A}$ einen Pfad π von p_0 nach p_n mit Beschriftung w (der u.U. zusätzliche ε-Schritte enthält).

1. Fall: $p_n \in F$
Dann zeigt π, dass $w \in L(\mathcal{A})$.

2. Fall: $p_n \in F' \setminus F$, d.h. $p_n = q_0$
Nach Definition von F' gilt $q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p$ für ein $p \in F$. Es gibt also in $\mathcal{A}$ einen Pfad von p_0 über $p_n = q_0$ nach $p \in F$ mit Beschriftung w, daher $w \in L(\mathcal{A})$.

2. $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}')$: Sei $w \in L(\mathcal{A})$.

1. Fall: $w \neq \varepsilon$. Sei

$$\pi = p_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p'_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p'_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} p_2 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} \cdots \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p'_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

Pfad in $\mathcal{A}$ mit $p_0 = q_0$, $p_n \in F$ und Beschriftung w. Nach Definition von Δ' ist

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}'} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}'} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}'} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}'} p_n$$

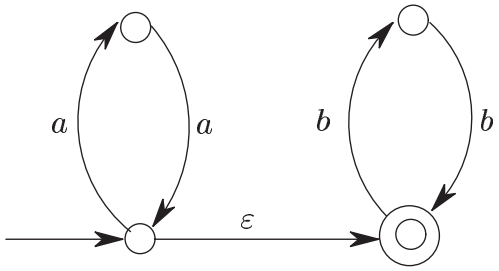
ein Pfad in $\mathcal{A}'$. Aus $p_n \in F$ folgt $p_n \in F'$, also $w \in L(\mathcal{A}')$.

2. Fall: $w = \varepsilon$

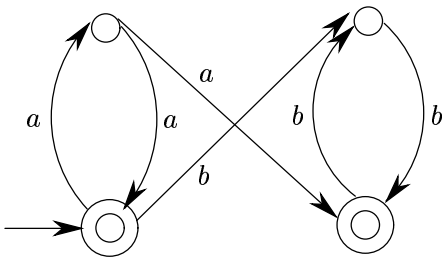
Wegen $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$ gibt es $p \in F$ mit $q_0 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p$. Also $q_0 \in F'$ nach Definition von F' und damit $\varepsilon \in L(\mathcal{A}')$.

□

Beispiel: (zu Lemma 1.18)
Der ε-NEA aus Beispiel 1.17



wird in folgenden NEA überführt:



2. Nachweis der Nichterkennbarkeit

Nicht jede formale Sprache ist erkennbar. Im Gegenteil ist es so, dass nur solche Sprachen, die auf sehr reguläre Weise aufgebaut sind, erkennbar sein können. Es stellt sich also die Frage, wie man von einer Sprache nachweist, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Um nachzuweisen, dass eine gegebene Sprache erkennbar ist, genügt es, einen endlichen Automaten (DEA oder NEA) dafür anzugeben. Der Nachweis, dass eine Sprache nicht erkennbar ist, gestaltet sich schwieriger: man kann nicht alle unendlich viele existierende Automaten durchprobieren und es genügt auch nicht, zu sagen, dass man keinen funktionierenden Automaten gefunden hat.

Darum verwendet man die folgende Strategie. Man etabliert allgemeine Eigenschaften, die von jeder erkennbaren Sprache erfüllt werden. Um von einer Sprache zu zeigen, dass sie nicht erkennbar ist, genügt es dann, nachzuweisen, dass sie die Eigenschaft verletzt. Die wichtigste solche Eigenschaft wird durch das bekannte Pumping-Lemma beschrieben, das in verschiedenen Versionen existiert.

Lemma 2.1 (Pumping-Lemma, einfache Version)
Es sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so dass gilt: Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ lässt sich zerlegen in $w = xyz$ mit

- $y \neq \varepsilon$
- $xy^k z \in L$ *für alle* $k \geq 0$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Wir wählen $n_0 = |Q|$. Sei nun $w = a_1 \cdots a_m \in L$ ein Wort mit $m \geq n_0$. Dann existiert ein Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_m}_{\mathcal{A}} p_m$$

mit $p_0 = q_0$ und $p_m \in F$. Wegen $m \geq n_0 = |Q|$ können die $m+1$ Zustände $p_0, \ldots, p_m$ nicht alle verschieden sein. Es gibt also ein $i < j$ mit $p_i = p_j$. Wir wählen

$$x := a_1 \cdots a_i, \quad y := a_{i+1} \cdots a_j, \quad z := a_{j+1} \cdots a_m.$$

Offensichtlich gilt $y \neq \varepsilon$ (da $i < j$) und

$$q_0 = p_0 \overset{x}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p_i \overset{y}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p_i = p_j \overset{z}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p_m \in F.$$

Folglich gilt für alle $k \geq 0$ auch $p_i \overset{y^k}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p_i$, was $xy^k z \in L$ zeigt. □

Wir zeigen mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht erkennbar ist.

Beispiel:
$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist *nicht* erkennbar.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, L sei erkennbar. Es gibt also eine Zahl n_0 mit den in Lemma 2.1 beschriebenen Eigenschaften. Wähle das Wort

$$w = a^{n_0}b^{n_0} \in L.$$

Da $|w| \geq n_0$, gibt es eine Zerlegung $a^{n_0}b^{n_0} = xyz$ mit $|y| \geq 1$ und $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

1. Fall: y liegt ganz in a^{n_0}.
D.h. $x = a^{k_1},\ y = a^{k_2},\ z = a^{k_3}b^{n_0}$ mit $k_2 > 0$ und $n_0 = k_1 + k_2 + k_3$. Damit ist aber $xy^0z = xz = a^{k_1+k_3}b^{n_0} \notin L$, da $k_1 + k_3 < n_0$. Widerspruch.

2. Fall: y liegt ganz in b^{n_0}.
Führt entsprechend zu einem Widerspruch.

3. Fall: y enthält as und bs.
Dann ist xy^2z von der Form $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}b^{k_4}$ wobei alle $k_i > 0$, also $xy^2z \notin L$. Widerspruch.

In allen drei Fällen haben wir also einen Widerspruch erhalten, d.h. die Annahme „L ist erkennbar“ war falsch. □

Mit Hilfe der einfachen Variante des Pumping-Lemmas gelingt es leider nicht immer, die Nichterkennbarkeit einer Sprache nachzuweisen, denn es gibt Sprachen, die nicht erkennbar sind, aber trotzdem die in Lemma 2.1 beschriebene Pumping-Eigenschaft erfüllen. Anders ausgedrückt ist die Pumping-Eigenschaft aus Lemma 2.1 zwar *notwendig* für die Erkennbarkeit einer Sprache, aber nicht *hinreichend*.

Beispiel 2.2
Ist $L = \{a^nb^m \mid n \neq m\}$ erkennbar? Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.1 zu zeigen, so scheitert man, da L die Eigenschaft aus dem einfachen Pumping-Lemma erfüllt:
Wähle $n_0 := 3$. Es sei nun $w \in L$ mit $|w| \geq 3$, d.h. $w = a^nb^m$, $n \neq m$ und $n + m \geq 3$. Wir zeigen: w läßt sich zerlegen in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

1. Fall: $n > m$ (es gibt mehr as als bs)

1.1.: $n > m + 1$ (es gibt mind. 2 as mehr als bs)
Zerlege w in $x = \varepsilon,\ y = a,\ z = a^{n-1}b^m$. Dann hat jedes $xy^kz = a^{(n-1)+k}b^m$ mehr as als bs, ist also in L.

1.2.: $n = m + 1$ (es gibt genau ein a mehr als bs)
Wegen $|w| \geq 3$ kann man w zerlegen in $x = \varepsilon$, $y = a^2,\ z = a^{n-2}b^m$. Es gilt:

a) $xy^0z = a^{n-2}b^m$ hat ein a weniger als bs, ist also in L

b) $xy^kz = a^{(n-2)+2k}b^m$ hat mehr as als bs für alle $k \geq 1$, ist also in L.

2. Fall: $n < m$ (es gibt mehr bs als as)
Symmetrisch zum 1. Fall.

Trotzdem ist $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ nicht erkennbar, was man mit der folgenden verschärften Variante des Pumping-Lemmas nachweisen kann.

Lemma 2.3 (Pumping-Lemma, verschärfte Variante)
Es sei L erkennbar. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so dass gilt:
Für alle Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $uvw \in L$ und $|v| \geq n_0$ gibt es eine Zerlegung $v = xyz$ mit

- $y \neq \varepsilon$
- $uxy^k zw \in L$ *für alle* $k \geq 0$

Beweis. Es sei wieder $n_0 := |Q|$, wobei Q die Zustände eines NEA $\mathcal{A}$ für L sind. Ist $uvw \in L$, so gibt es Zustände $p, q, f \in Q$ mit

$$q_0 \overset{u}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} p \overset{v}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} f \in F$$

Auf dem Pfad von p nach q liegen $|v| + 1 > n_0$ Zustände, also müssen zwei davon gleich sein. Jetzt kann man wie im Beweis von Lemma 2.1 weitermachen. □

Im Vergleich mit Lemma 2.1 macht dieses Lemma eine stärkere Aussage: es ist nicht nur so, dass man jedes Wort w mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile zerlegen und dann „pumpen“ kann, sondern das gilt sogar für *jedes Teilwort* v von w mit $|v| \geq n_0$. Beim Nachweis der Nichterkennbarkeit hat das den Vorteil, dass man das Teilwort v frei wählen kann, so wie es zum Herstellen eines Widerspruchs am bequemsten ist.

Beispiel 2.2 (Fortsetzung)
$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ ist *nicht* erkennbar.

Beweis. Angenommen, L ist doch erkennbar; dann gibt es $n_0 \geq 1$, das die in Lemma 2.3 geforderten Eigenschaften hat. Wähle des Wort

$$a^{n_0} b^{n_0! + n_0} \in L \text{ und die Zerlegung } u := \varepsilon,\ v := a^{n_0},\ w := b^{n_0! + n_0}$$

Dann gibt es eine Zerlegung $v = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $uxy^k zw \in L$ für alle $k \geq 0$. Sei

$$x = a^{k_1},\ y = a^{k_2},\ z = a^{k_3},\ k_1 + k_2 + k_3 = n_0,\ k_2 > 0$$

Da $0 < k_2 \leq n_0$ gibt es ein ℓ mit $k_2 \cdot \ell = n_0!$. Betrachte das Wort $uxy^{\ell+1}zw$, welches in L sein müsste. Die Anzahl von as ist

$$k_1 + (\ell + 1) \cdot k_2 + k_3 = k_1 + k_2 + k_3 + (\ell \cdot k_2) = n_0 + n_0!$$

und die Anzahl von bs (welche nur im Teilwort w auftreten) ebenso, also gilt $uxy^{\ell+1}zw \notin L$. Widerspruch. □

Auch Lemma 2.3 formuliert nur eine notwendige Eigenschaft für die Erkennbarkeit einer Sprache, aber keine hinreichende. In der Literatur findet man noch verschärftere (und kompliziertere) Varianten des Pumping-Lemmas, die dann auch hinreichend sind (z.B. Jaffes Pumping-Lemma). Diese Varianten liefern also eine automatenunabhängige Charakterisierung der erkennbaren Sprachen.

3. Abschlusseigenschaften und Entscheidungsprobleme

Endliche Automaten definieren eine ganze *Klasse* von Sprachen: die erkennbaren Sprachen (auch *reguläre Sprachen* genannt, siehe Kapitel 4). Anstatt die Eigenschaften einzelner Sprachen zu studieren (wie z.B. Erkennbarkeit) kann man auch die Eigenschaften ganzer Sprachklassen betrachten. Wir interessieren uns hier insbesondere für Abschlußeigenschaften, zum Beispiel unter Schnitt: wenn L_1 und L_2 erkennbare Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ eine erkennbare Sprache.

Es stellt sich heraus, dass die Klasse der erkennbaren Sprachen unter den meisten natürlichen Operationen abgeschlossen ist. Diese Eigenschaft ist für viele technische Konstruktionen und Beweise sehr nützlich. Wie wir beispielsweise sehen werden, kann man manchmal die Anwendung des Pumping-Lemmas durch ein viel einfacheres Argument ersetzen, das auf Abgeschlossenheitseigenschaften beruht. Später werden wir sehen, dass andere interessante Sprachklassen nicht unter allen natürlichen Operationen abgeschlossen sind.

Satz 3.1 (Abschlusseigenschaften erkennbarer Sprachen)
Sind L_1 und L_2 erkennbar, so sind auch

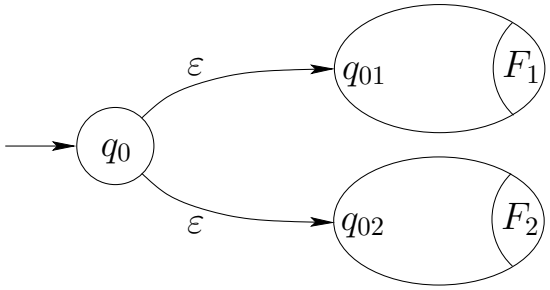
- $L_1 \cup L_2$ *(Vereinigung)*
- $\overline{L_1}$ *(Komplement)*
- $L_1 \cap L_2$ *(Schnitt)*
- $L_1 \cdot L_2$ *(Konkatenation)*
- L_1^* *(Kleene-Stern)*

erkennbar.

Beweis. Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, q_{0i}, \Delta_i, F_i)$ zwei NEAs für L_i $(i = 1, 2)$. O.B.d.A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

1) **Abschluss unter Vereinigung:**
Der folgende ε-NEA erkennt $L_1 \cup L_2$:
$\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \Sigma, q_0, \Delta, F_1 \cup F_2)$, wobei
   - $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$ und
   - $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(q_0, \varepsilon, q_{01}), (q_0, \varepsilon, q_{02})\}$.

   Schematisch sieht der *Vereinigungsautomat* $\mathcal{A}$ so aus.



Mit Lemma 1.18 gibt es zu $\mathcal{A}$ einen äquivalenten NEA.

2) **Abschluss unter Komplement:**
Einen DEA für $\overline{L_1}$ erhält man wie folgt:
Zunächst verwendet man die Potenzmengenkonstruktion, um zu $\mathcal{A}_1$ einen äquivalenten DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ zu konstruieren. Den DEA für $\overline{L_1}$ erhält man nun durch Vertauschen der Endzustände mit den Nicht-Endzuständen:

$$\overline{\mathcal{A}} := (Q, \Sigma, q_0, \delta, Q \setminus F).$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{array}{lll} w \in \overline{L_1} & \underline{\text{gdw}}. & w \notin L(\mathcal{A}_1) \\ & \underline{\text{gdw}}. & w \notin L(\mathcal{A}) \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, w) \notin F \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, w) \in Q \setminus F \\ & \underline{\text{gdw}}. & w \in L(\overline{\mathcal{A}}) \end{array}$$

Beachte: Diese Konstruktion funktioniert nicht für NEAs.

3) **Abschluss unter Schnitt:**
Wegen $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ folgt 3) aus 1) und 2).
Da die Potenzmengenkonstruktion, die wir für $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ benötigen, recht aufwendig ist und exponentiell große Automaten liefert, kann es günstiger sein, direkt einen NEA für $L_1 \cap L_2$ zu konstruieren, den sogenannten *Produktautomaten*:

$$\mathcal{A} := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (q_{01}, q_{02}), \Delta, F_1 \times F_2)$$

mit

$$\Delta := \{((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \mid (q_1, a, q_1') \in \Delta_1 \text{ und } (q_2, a, q_2') \in \Delta_2\}$$

Ein Übergang in $\mathcal{A}$ ist also genau dann möglich, wenn der entsprechende Übergang in $\mathcal{A}_1$ *und* $\mathcal{A}_2$ möglich ist.

Behauptung. $L(\mathcal{A}) = L_1 \cap L_2$.

Sei $w = a_1 \cdots a_n$. Dann ist $w \in L(\mathcal{A})$ $\underline{\text{gdw}}.$ es gibt einen Pfad

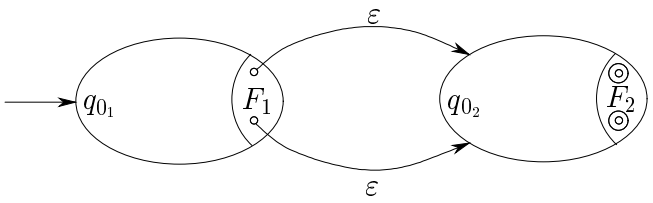
$$(q_{1,0}, q_{2,0}) \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} (q_{1,1}, q_{2,1}) \cdots (q_{1,n-1}, q_{2,n-1}) \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} (q_{1,n}, q_{2,n})$$

mit $(q_{1,0}, q_{2,0}) = (q_{01}, q_{02})$ und $(q_{1,n}, q_{2,n}) \in F_1 \times F_2$. Nach Konstruktion von $\mathcal{A}$ ist das der Fall $\underline{\text{gdw}}.$ für jedes $i \in \{1, 2\}$

$$q_{i,0} \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}_i} q_{i,1} \cdots q_{i,n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}_i} q_{i,n}$$

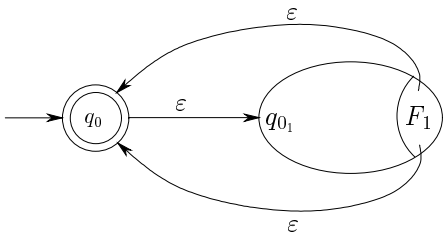
ein Pfad ist mit q_{0i} und $q_{i,n} \in F_i$. Solche Pfade existieren gdw. $w \in L_1 \cap L_2$.

4) **Abschluss unter Konkatenation:**
Der folgende ε-NEA erkennt $L_1 \cdot L_2$:
$\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, q_{01}, \Delta, F_2)$, wobei
$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f, \varepsilon, q_{02}) \mid f \in F_1\}$



5) **Abschluss unter Kleene-Stern:**
Der folgende ε-NEA erkennt L_1^*:
$\mathcal{A} := (Q_1 \cup \{q_0\}, \Sigma, q_0, \Delta, \{q_0\})$, wobei

- $q_0 \notin Q_1$
- $\Delta := \Delta_1 \cup \{(f, \varepsilon, q_0) \mid f \in F_1\} \cup \{(q_0, \varepsilon, q_{01})\}$.



□

Anmerkung: diese Konstruktion funktioniert nicht, wenn man anstelle des neuen Zustands q_0 den ursprünglichen Startzustand verwendet (Übung!)

Beachte:

Die Automaten für die Sprachen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cdot L_2$ und L_1^* sind polynomiell in der Größe der Automaten für L_1, L_2. Beim Komplement kann der konstruierte Automat exponentiell groß sein, wenn man mit einem NEA beginnt.

Man kann derartige Abschlusseigenschaften dazu verwenden, Nichterkennbarkeit einer Sprache L nachzuweisen.

Beispiel 3.2

$L := \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ ist *nicht* erkennbar (vgl. Beispiel 2.2). Anstatt dies direkt mit Lemma 2.3 zu zeigen, kann man auch verwenden, dass bereits bekannt ist, dass die Sprache $L' := \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *nicht* erkennbar ist. Wäre nämlich L erkennbar, so auch $L' = \overline{L} \cap \{a\}^* \cdot \{b\}^*$. Da wir schon wissen, dass L' nicht erkennbar ist, kann auch L nicht erkennbar sein.

Entscheidungsprobleme

Wenn man einen endlichen Automaten in einer konkreten Anwendung einsetzen will, so ist es wichtig, sich zunächst vor Augen zu führen, was *genau* man mit dem Automaten anfangen möchte. In Abhängigkeit davon kann man dann die konkreten, in dieser Anwendung zu lösenden algorithmischen Probleme bestimmen.

Wir betrachten drei typische Probleme im Zusammenhang mit erkennbaren Sprachen. Bei allen dreien handelt es sich um *Entscheidungsprobleme*, also um Probleme, für die der Algorithmus eine Antwort aus der Menge $\{\text{ja}, \text{nein}\}$ berechnen soll—formal werden wir diesen Begriff erst in Teil III einführen. Die drei betrachteten Probleme sind:

- das *Wortproblem*:

  gegeben ein endlicher Automat $\mathcal{A}$ und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ für $\mathcal{A}$, entscheide ob $w \in L(\mathcal{A})$;

- das *Leerheitsproblem*:

  gegeben ein endlicher Automat $\mathcal{A}$, entscheide ob $L(\mathcal{A}) = \emptyset$;

- das *Äquivalenzproblem*:

  gegeben endliche Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, entscheide ob $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$.

Wir werden Algorithmen für alle diese Probleme entwerfen und deren Laufzeit analysieren: wie viele elementare Rechenschritte macht der Algorithmus auf Eingaben der Länge n; siehe Appendix A für weitere Erklärungen zur Laufzeit- bzw. Komplexitätsanalyse von Algorithmen.

In den obigen Problemen können die als Eingabe gegebenen endlichen Automaten entweder DEAs oder NEAs sein. Für die Anwendbarkeit der Algorithmen macht das im Prinzip keinen Unterschied, da man zu jedem NEA ja einen äquivalenten DEA konstruieren kann (man überlegt sich leicht, dass die Potenzmengenkonstruktion aus Satz 1.12 algorithmisch implementierbar ist). Bezüglich der Laufzeit kann es aber einen erheblichen Unterschied geben, da der Übergang von NEAs zu DEAs einen exponentiell größeren Automaten liefert und damit auch die Laufzeit exponentiell größer wird.

Wortproblem (DEA)

Ist der Eingabeautomat $\mathcal{A}$ für das Wortproblem ein DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, so kann man beginnend mit q_0 durch Anwendung von δ berechnen, in welchem Zustand $\mathcal{A}$ nach dem Lesen der Eingabe w ist. Man muß dann nur noch prüfen, ob dies ein Endzustand ist. Man muss δ offensichtlich $|w|$ mal anwenden und jede Anwendung benötigt $|\delta|$ Schritte (Durchsuchen von δ nach dem richtigen Übergang).

Satz 3.3

Das Wortproblem für DEAs ist in Zeit $O(|w| \cdot |\delta|)$ entscheidbar.

Für einen NEA ist dieser triviale Algorithmus nicht möglich, da es ja mehrere mit w beschriftete Pfade geben kann. In der Tat führen die naiven Ansätze zum Entscheiden des Wortproblems für NEAs zu exponentieller Laufzeit:

- Alle Pfade für das Eingabewort durchprobieren.

  Im schlimmsten Fall gibt es $|Q|^{|w|}$ viele solche Pfade, also exponentiell viele. Wenn $w \notin L(\mathcal{A})$ werden alle diese Pfade auch tatsächlich überprüft.

- Erst Potenzmengenkonstruktion anwenden, um DEA zu konstruieren.

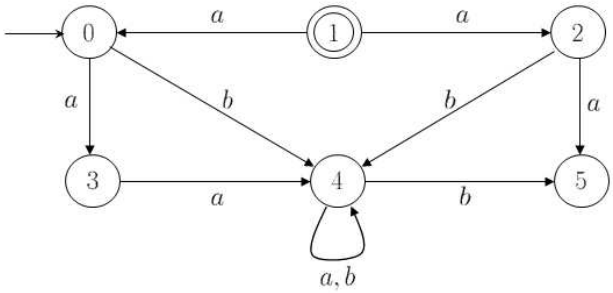
  Wie bereits erwähnt führt die exponentielle Vergrößerung des Automaten zu exponentieller Laufzeit.

Es stellt sich allerdings heraus, dass auch das Wortproblem für NEAs effizient lösbar ist. Wir verwenden dazu (einen Trick und) den Algorithmus für das Leerheitsproblem, das wir im folgenden betrachten.

Leerheitsproblem

Wir betrachten hier direkt NEAs. Da jeder DEA auch ein NEA ist, können die entwickelten Algorithmen natürlich auch für DEAs verwendet werden.

Im Gegensatz zum Wortproblem ist beim Leerheitsproblem keine konkrete Eingabe gegeben. Es scheint daher zunächst, als müsste man alle (unendlich vielen) Eingaben durchprobieren, was natürlich unmöglich ist. Ein einfaches Beispiel zeigt aber sofort, dass das Leerheitsproblem sehr einfach zu lösen ist. Betrachte den folgenden NEA $\mathcal{A}$:



Offensichtlich ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$, da der Endzustand vom Startzustand aus gar nicht erreichbar ist. Man überlegt sich leicht, dass auch die umgekehrte Implikation gilt: wenn $L(\mathcal{A}) = \emptyset$, dann ist kein Endzustand vom Startzustand aus erreichbar, denn sonst würde die Beschriftung des den Endzustand erreichenden Pfades ein Wort $w \in L(\mathcal{A})$ liefern. Das Leerheitsproblem ist also nichts weiter als ein Erreichbarkeitsproblem auf gerichteten Graphen wie dem oben dargestellten.

Das konkrete Wort, mit dem ein Endzustand erreicht wird, interessiert uns im Fall des Leerheitsproblems meist nicht. Da wir jedoch im folgenden Aussagen über die Länge von Pfaden treffen müssen, schreiben wir $p \Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{i} q$ (q wird in $\mathcal{A}$ von p mit einem Pfad der Länge höchtens i erreicht) wenn $p \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q$ für ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq i$.

Es gibt verschiedene effiziente Algorithmen für Erreichbarkeitsprobleme auf gerichteten Graphen. Der folgende ist eine Variante von "Breitensuche" und entscheidet das Leerheitsproblem für einen gegebenen NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ in polynomieller Zeit. Berechne eine Folge von Zustandsmengen $P_0, P_1, \ldots$ wie folgt:

- $P_0 := \{q_0\}$
- $P_{i+1} := P_i \cup \{q \in Q \mid \exists p \in P_i \exists a \in \Sigma : (p, a, q) \in \Delta\}$.

Stoppe sobald $P_{i+1} = P_i$. Antworte "ja" wenn $P_i \cap F = \emptyset$ und "nein" sonst.

Lemma 3.4
Der Algorithmus terminiert nach maximal $|Q|$ Iterationen und gibt "ja" zurück gdw. $L(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Beweis. Die Terminierung in $|Q|$ Schritten folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \cdots \subseteq Q.$$

Bei Terminierung nach i Schritten, setze $S_j := S_i$ für alle $j > i$.

Der Beweis der Korrektheit basiert auf folgender Behauptung.

Behauptung: $q \in P_j$ gdw. $q_0 \Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{j} q$ für alle $j \geq 0$ und $q \in Q$.

Beweis per Induktion über j:

$j = 0$. $q \in P_0$ gdw. $q = q_0$ gdw. $q_0 \Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{0} q$.

$j > 0$. $q \in P_j$ gdw. $q \in P_{j-1}$ oder $(p, a, q) \in \Delta$ mit $p \in P_{j-1}$ und $a \in \Sigma$
gdw. $q \in P_{j-1}$ oder $(p, a, q) \in \Delta$ und $q_0 \Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{j-1} p$
gdw. $q_0 \Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{j} q$.

Die Korrektheit des Algorithmus folgt:

Der Algorithmus gibt "ja" zurück
gdw. $P_i \cap F = \emptyset$
gdw. $P_j \cap F = \emptyset$ für alle $j \geq 0$
gdw. $q_0 \not\Longrightarrow_{\mathcal{A}}^{j} q_f$ für alle $q_f \in F$ und $j \geq 0$
gdw. $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ □

Der Algorithmus stoppt also nach $|Q|$ Iterationen. Jede Iteration braucht bei naiver Implementierung Zeit $\mathcal{O}(|Q| \cdot |\Delta|)$: laufe über alle Zustände $p \in P_i$, für jeden solchen Zustand laufe über Δ und suche alle Übergänge (p, a, q). Insgesamt benötigt der Algorithmus also Zeit $\mathcal{O}(|Q|^2 \cdot |\Delta|)$. Durch geschickte Datenstrukturen kann man die Laufzeit verbessern auf Zeit $\mathcal{O}(|Q| + |\Delta|)$, also *Linearzeit*. Mehr Informatinen finden sich beispielsweise im Buch „Introduction to Algorithms" von Cormen, Leiserson, Rivest und Stein unter dem Thema *Erreicharkeit in gerichteten Graphen / reachability in directed graphs*. In der Tat ist das Leerheitsproblem im wesentlichen einfach nur eine Instanz dieses generelleren Problems.

Satz 3.5
Das Leerheitsproblem für NEAs ist in Zeit $O(|Q| + |\Delta|)$ entscheidbar.

Wortproblem (NEA)

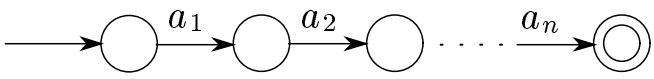
Wir verwenden Satz 3.5 um nachzuweisen, dass das Wortproblem für NEAs nicht schwieriger ist als das für DEAs. Die exponentielle Laufzeit der naiven Ansätze kann also vermieden werden.

Satz 3.6

Das Wortproblem für NEAs ist in Zeit $O(|w| \cdot |\delta|)$ entscheidbar.

Wir verwenden eine *Reduktion* des Wortproblems auf das Leerheitsproblem: der schon gefundene Algorithmus für das Leerheitsproblem wird verwendet, um das Wortproblem zu lösen (mehr zu Reduktionen findet sich in den Teilen III+IV).

Beweis. Konstruiere zunächst einen Automaten $\mathcal{A}_w$, der genau das Wort $w = a_1 \cdots a_n$ akzeptiert:



Dieser Automat hat $|w| + 1$ Zustände. Offenbar ist

$$w \in L(\mathcal{A}) \quad \underline{\text{gdw}}. \quad L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset.$$

Wir können also entscheiden, ob $w \in L(\mathcal{A})$ ist, indem wir zunächst den Produktautomaten zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_w$ konstruieren und dann unter Verwendung von Satz 3.5 prüfen, ob dieser eine nicht-leere Sprache erkennt.

Wir analysieren zunächst die Größe des Produktautomaten:

Zustände: $|Q| \cdot (|w| + 1)$

Übergänge: Da es in $\mathcal{A}_w$ genau $|w|$ viele Übergänge gibt, ist die Zahl Übergänge des Produktautomaten durch $|w| \cdot |\Delta|$ beschränkt.

Nach Satz 3.5 ist daher der Aufwand zum Testen von $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$ also:

$$O(|Q| \cdot (|w| + 1) + |w| \cdot |\Delta|) = O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)) \qquad \square$$

Auch die Konstruktion des Produktautomaten benötigt Zeit. Man überlegt sich leicht, dass auch hierfür die Zeit $O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)$ ausreichend ist. Als Gesamtlaufzeit ergibt sich

$$2 \cdot O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)) = O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)).$$

Äquivalenzproblem

Wir verwenden sowohl für DEAs als auch für NEAs eine Reduktion auf das Leerheitsproblem:

$$L_1 = L_2 \quad \underline{\text{gdw}}. \quad (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1}) = \emptyset$$

Im Fall des Äquivalenzproblems wollen wir auf eine ganz exakte Analyse der Laufzeit des sich ergebenden Algorithmus verzichten. Allerdings gibt es einen interessanten Unterschied zwischen DEAs und NEAs, der im folgenden Satz herausgearbeitet wird.

Satz 3.7
Das Äquivalenzproblem für DEAs ist in polynomieller Zeit entscheidbar. Für NEAs ist es in exponentieller Zeit entscheidbar.

Beweis. Die Konstruktion für Schnitt (Produktautomat) und Vereinigung ist sowohl für DEAs als auch für NEAs polynomiell. Bei der Komplementierung ist dies nur dann der Fall, wenn bereits DEAs vorliegen. Bei NEAs muss zunächst die Potenzmengenkonstruktion angewendet werden, daher kann der auf Leerheit zu testende Automat exponentiell groß sein. Damit ergibt sich exponentielle Laufzeit. □

Wir werden in Teil IV sehen, dass sich der exponentielle Zeitaufwand für das Äquivalenzproblem für NEAs (wahrscheinlich) nicht vermeiden lässt. Vorgreifend auf Teil IV sei erwähnt, dass das Äquivalenzproblem für NEAs PSPACE-vollständig ist und damit zu einer Klasse von Problemen gehört, die wahrscheinlich nicht in polynomieller Zeit lösbar sind.

4. Reguläre Ausdrücke und Sprachen

Wir haben bereits einige *verschiedene Charakterisierungen* der Klasse der erkennbaren Sprachen gesehen:

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *erkennbar* gdw.

(1) $L = L(\mathcal{A})$ für einen DEA $\mathcal{A}$.

(2) $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA $\mathcal{A}$.

(3) $L = L(\mathcal{A})$ für einen ε-NEA $\mathcal{A}$.

(4) $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA mit Wortübergängen $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$.

Im folgenden betrachten wir eine weitere Charakterisierung mit Hilfe *regulärer Ausdrücke*. Diese Stellen eine bequeme „Sprache“ zur Verfügung, mittels derer erkennbare Sprachen beschrieben werden können. Varianten von regulären Ausdrücken werden in tools wie Emacs, Perl und sed zur Beschreibung von Mustern („Patterns“) verwendet.

Definition 4.1 (Syntax regulärer Ausdrücke)
Sei Σ ein endliches Alphabet. Die Menge Reg_Σ der *regulären Ausdrücke über* Σ ist induktiv definiert:

- $\emptyset$, ε, a (für $a \in \Sigma$) sind Elemente von Reg_Σ.
- Sind $r, s \in Reg_\Sigma$, so auch $(r + s), (r \cdot s), r^* \in Reg_\Sigma$.

Beispiel 4.2
$((a \cdot b^*) + \emptyset^*)^* \in Reg_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b\}$

Notation:
Um Klammern zu sparen, lassen wir Außenklammern weg und vereinbaren,

- dass * stärker bindet als $\cdot$
- dass $\cdot$ stärker bindet als $+$
- $\cdot$ lassen wir meist ganz wegfallen.

Der Ausdruck aus Beispiel 4.2 kann also geschrieben werden als $(ab^* + \emptyset^*)^*$.

Um die Bedeutung bzw. Semantik von regulären Ausdrücken zu fixieren, wird jedem regulären Ausdruck r über Σ eine formale Sprache $L(r)$ zugeordnet.

Definition 4.3 (Semantik regulärer Ausdrücke)
Die durch den regulären Ausdruck r definierte Sprache $L(r)$ ist induktiv definiert:

- $L(\emptyset) := \emptyset, \quad L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}, \quad L(a) := \{a\}$
- $L(r + s) := L(r) \cup L(s), \quad L(r \cdot s) := L(r) \cdot L(s), \quad L(r^*) := L(r)^*$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *regulär*, falls es ein $r \in Reg_\Sigma$ gibt mit $L = L(r)$.

Beispiel:

- $(a+b)^*ab(a+b)^*$ definiert die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, die Infix ab haben.
- $L(ab^* + b) = \{ab^i \mid i \geq 0\} \cup \{b\}$

Bemerkung:

Statt $L(r)$ schreiben wir im folgenden häufig einfach r.
Dies ermöglicht es und z.B., zu schreiben:

- $(ab)^*a = a(ba)^*$ (eigentlich $L((ab)^*a) = L(a(ba)^*)$)
- $L(\mathcal{A}) = ab^* + b$ (eigentlich $L(\mathcal{A}) = L(ab^* + b)$)

Wir zeigen nun, dass man mit regulären Ausdrücken genau die erkennbaren Sprachen definieren kann.

Satz 4.4 (Kleene)

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind äquivalent:

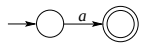
1) L ist regulär.

2) L ist erkennbar.

Beweis.

„$1 \to 2$“: Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke

Anfang:

- $L(\emptyset) = \emptyset$ erkennbar:  ist NEA für $\emptyset$ (kein Endzustand).
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ erkennbar:  ist NEA für $\{\varepsilon\}$.
- $L(a) = \{a\}$ erkennbar:  ist NEA für $\{a\}$.

Schritt: Weiß man bereits, dass $L(r)$ und $L(s)$ erkennbar sind, so folgt mit Satz 3.1 (Abschlusseigenschaften), dass auch

- $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
- $L(r \cdot s) = L(r) \cdot L(s)$ und
- $L(r^*) = L(r)^*$

erkennbar sind.

„$2 \to 1$“: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA mit $L = L(\mathcal{A})$. Für alle $p, q \in Q$ und $X \subseteq Q$, sei $L^X_{p,q}$ die Sprache aller Wörter $w = a_1 \cdots a_n$ für die es einen Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

gibt mit $p_0 = p$, $p_n = q$ und $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\} \subseteq X$. Offensichtlich gilt

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} L^Q_{q_0,q_f}.$$

Es reicht also, zu zeigen dass alle Spachen $L^X_{p,q}$ regulär sind. Dies erfolgt per Induktion über die Größe von X.

Anfang: $X = \emptyset$.

- 1. Fall: $p \neq q$
  Dann ist $L^{\emptyset}_{p,q} = \{a \in \Sigma \mid (p, a, q) \in \Delta\}$. Damit hat $L^{\emptyset}_{p,q}$ die Form $\{a_1, \ldots, a_k\}$ und der entsprechende reguläre Ausdruck ist $a_1 + \cdots + a_k$.
- 2. Fall: $p = q$
  Wie voriger Fall, ausser dass $L^{\emptyset}_{p,q}$ (und damit auch der konstruierte reguläre Ausdruck) zusätzlich ε enthält.

Schritt: $X \neq \emptyset$.

Wähle ein beliebiges $\widehat{q} \in X$. Dann gilt:

$$L^X_{p,q} = L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,q} \cup \left(L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,\widehat{q}} \cdot \left(L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},\widehat{q}}\right)^* \cdot L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},q} \right) \qquad (*)$$

Für die Sprachen, die auf der rechten Seite verwendet werden, gibt es nach Induktionsvoraussetzung reguläre Ausdrücke. Ausserdem sind alle verwendeten Operationen in regulären Ausdrücken verfügbar. Es bleibt also, $(*)$ zu zeigen.

$\subseteq$ Sei $w \in L^X_{p,q}$. Dann gibt es einen Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

mit $p_0 = p$, $p_n = q$ und $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\} \subseteq X$. Wenn $\widehat{q}$ nicht in $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ vorkommt, dann $w \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,q}$. Andernfalls seien $i_1, \ldots, i_k$ alle Indizes mit $p_{i_j} = \widehat{q}$ (und $i_1 < \cdots < i_k$). Offensichtlich gilt:

- $a_0 \cdots a_{i_1} \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,\widehat{q}}$;
- $a_{i_j+1} \cdots a_{i_{j+1}} \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},\widehat{q}}$ für $1 \leq j < k$;
- $a_{i_k+1} \cdots a_n \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},q}$.

$\supseteq$ Wenn $w \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,q}$, dann offenbar $w \in L^X_{p,q}$. Wenn

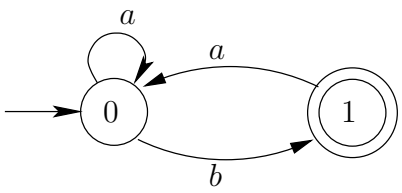
$$w \in \left(L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,\widehat{q}} \cdot \left(L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},\widehat{q}}\right)^* \cdot L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},q} \right),$$

dann $w = xyz$ mit $x \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{p,\widehat{q}}$, $y \in (L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},\widehat{q}})^*$, und $z \in L^{X\setminus\{\widehat{q}\}}_{\widehat{q},q}$. Setzt man die entsprechenden Pfade für x, y und z zusammen, so erhält man einen mit w beschrifteten Pfad von p nach q in $\mathcal{A}$, in dem alle Zustände ausser dem ersten und letzten aus X sind. Also $w \in L^X_{p,q}$.

Wenn man die Konstruktion aus „$2 \to 1$“ in der Praxis anwendet, so ist es meist sinnvoll, die Zustände $\widehat{q}$ so zu wählen, dass der Automat in möglichst viele nicht-verbundene Teile zerfällt.

Beispiel 4.5

Betrachte den folgenden NEA $\mathcal{A}$:



Da 1 der einzige Endzustand ist, gilt $L(\mathcal{A}) = L_{0,1}^{Q}$. Wir wenden wiederholt $(*)$ an:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^{Q} &= L_{0,1}^{\{0\}} \cup L_{0,1}^{\{0\}} \cdot (L_{1,1}^{\{0\}})^* \cdot L_{1,1}^{\{0\}} \\ L_{0,1}^{\{0\}} &= L_{0,1}^{\emptyset} \cup L_{0,0}^{\emptyset} \cdot (L_{0,0}^{\emptyset})^* \cdot L_{0,1}^{\emptyset} \\ L_{1,1}^{\{0\}} &= L_{1,1}^{\emptyset} \cup L_{1,0}^{\emptyset} \cdot (L_{0,0}^{\emptyset})^* \cdot L_{0,1}^{\emptyset} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt hätten wir natürlich auch 0 anstelle von 1 aus X eliminieren können. Der Induktionsanfang liefert:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^{\emptyset} &= b \\ L_{0,0}^{\emptyset} &= a + \varepsilon \\ L_{1,1}^{\emptyset} &= \varepsilon \\ L_{1,0}^{\emptyset} &= a \end{aligned}$$

Einsetzen und Vereinfachen liefert nun:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^{\{0\}} &= b + (a + \varepsilon) \cdot (a + \varepsilon)^* \cdot b = a^*b \\ L_{1,1}^{\{0\}} &= \varepsilon + a \cdot (a + \varepsilon)^* \cdot b = \varepsilon + aa^*b \\ L_{0,1}^{Q} &= a^*b + a^*b \cdot (\varepsilon + aa^*b)^* \cdot (\varepsilon + aa^*b) = a^*b(aa^*b)^* \end{aligned}$$

Der zu $\mathcal{A}$ gehörende reguläre Ausdruck ist also $a^*b(aa^*b)^*$.

Der reguläre Ausdruck, der in der Richtung „$2 \to 1$“ aus einem NEA konstruiert wird, ist im allgemeinen exponentiell größer als der ursprüngliche NEA. Man kann zeigen, dass dies nicht vermeidbar ist.

Beachte: Aus Satz 3.1 und Satz 4.4 folgt, dass es zu allen regulären Ausdrücken r und s

- einen Ausdruck t gibt mit $L(t) = L(r) \cap L(s)$;
- einen Ausdruck t' gibt mit $L(t') = \overline{L(r)}$.

Es ist offensichtlich sehr schwierig, diese Ausdrücke direkt aus r und s (also ohne den Umweg über Automaten) zu konstruieren.

5. Minimale DEAs und die Nerode-Rechtskongruenz

Wir werden im Folgenden ein Verfahren angeben, welches zu einem gegebenen DEA einen äquivalenten DEA mit minimaler Zustandszahl konstruiert. Das Verfahren besteht aus 2 Schritten:

1. Schritt: Eliminieren unerreichbarer Zustände

Definition 5.1 (Erreichbarkeit eines Zustandes)
Ein Zustand q des DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ heißt *erreichbar*, falls es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\delta(q_0, w) = q$. Sonst heißt q *unerreichbar*.

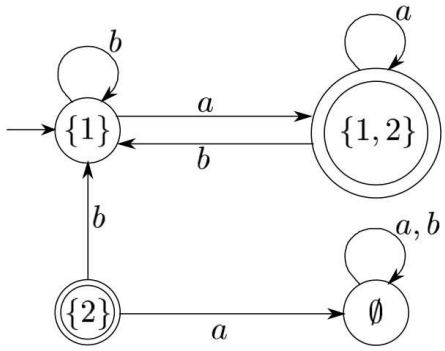
Da für die erkannte Sprache nur Zustände wichtig sind, welche von q_0 erreicht werden, erhält man durch Weglassen unerreichbarer Zustände einen äquivalenten Automaten:

$\mathcal{A}_0 = (Q_0, \Sigma, q_0, \delta_0, F_0)$ mit

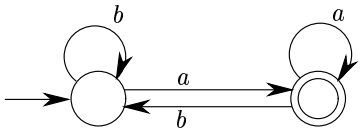
- $Q_0 = \{q \in Q \mid q \text{ ist erreichbar}\}$
- $\delta_0 = \delta \mid_{Q_0 \times \Sigma}$ (also: δ_0 ist wie δ, aber eingeschränkt auf die Zustände in Q_0)
- $F_0 = F \cap Q_0$

Beispiel.

Betrachte als Resultat der Potenzmengenkonstruktion den Automaten $\mathcal{A}'$ aus Beispiel 1.13:



Die Zustände $\{2\}$ und $\emptyset$ sind nicht erreichbar. Durch Weglassen dieser Zustände erhält man den DEA $\mathcal{A}'_0$:

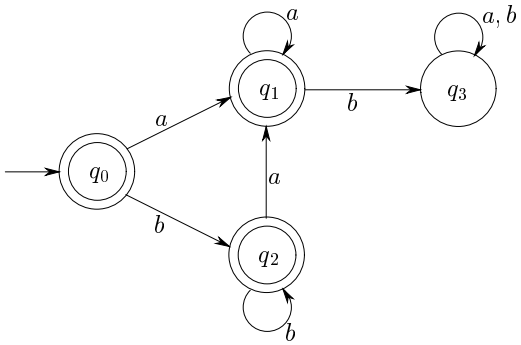


2. Schritt: Zusammenfassen äquivalenter Zustände

Ein DEA ohne unerreichbare Zustände muss noch nicht minimal sein, da er noch verschiedene Zustände enthalten kann, die sich „gleich“ verhalten in Bezug auf die erkannte Sprache.

Beispiel 5.2

Im folgenden DEA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = b^*a^*$ sind alle Zustände erreichbar. Er erkennt dieselbe Sprache wie der DEA aus Beispiel 1.7, hat aber einen Zustand mehr. Dies kommt daher, dass q_0 und q_2 äquivalent sind.



Im allgemeinen definieren wir die Äquivalenz von Zuständen wie folgt.

Definition 5.3 (Äquivalenz von Zuständen)

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein DEA. Für $q \in Q$ sei $\mathcal{A}_q = (Q, \Sigma, q, \delta, F)$. Zwei Zustände $q, q' \in Q$ heißen *$\mathcal{A}$-äquivalent* ($q \sim_\mathcal{A} q'$) gdw. $L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'})$.

In Beispiel 5.2 gilt $q_0 \sim_\mathcal{A} q_2$, aber z.B. nicht $q_0 \sim_\mathcal{A} q_1$, da $b \in L(\mathcal{A}_{q_0}) \setminus L(\mathcal{A}_{q_1})$.

Um äquivalente Zustände auf mathematisch elegante Weise zusammenzufassen, nutzen wir aus, dass es sich bei der Relation $\sim_\mathcal{A}$ um eine Äquivalenzrelation handelt. Diese erfüllt zusätzlich einige weitere angenehme Eigenschaften.

Lemma 5.4

1) $\sim_\mathcal{A}$ ist eine Äquivalenzrelation auf Q, d.h. reflexiv, transitiv und symmetrisch.

2) $\sim_\mathcal{A}$ ist verträglich mit der Übergangsfunktion, d.h.

$$q \sim_\mathcal{A} q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_\mathcal{A} \delta(q', a)$$

3) $\sim_\mathcal{A}$ kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Beweis.

1) ist klar, da „=“ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

2) lässt sich wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned}
q \sim_\mathcal{A} q' &\Rightarrow L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'}) \\
&\Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : \delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q', w) \in F \\
&\Rightarrow \forall a \in \Sigma\ \forall v \in \Sigma^* : \delta(q, av) \in F \Leftrightarrow \delta(q', av) \in F \\
&\Rightarrow \forall a \in \Sigma\ \forall v \in \Sigma^* : \delta(\delta(q, a), v) \in F \Leftrightarrow \delta(\delta(q', a), v) \in F \\
&\Rightarrow \forall a \in \Sigma : L(\mathcal{A}_{\delta(q,a)}) = L(\mathcal{A}_{\delta(q',a)}) \\
&\Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_\mathcal{A} \delta(q', a)
\end{aligned}$$

3) folgt unmittelbar daraus, dass das Äquivalenzproblem für DEAs in Polynomialzeit entscheidbar ist. □

Die $\sim_{\mathcal{A}}$-Äquivalenzklasse eines Zustands $q \in Q$ bezeichnen wir von nun an mit

$$[q]_{\mathcal{A}} := \{q' \in Q \mid q \sim_{\mathcal{A}} q'\}.$$

Auch wenn wir mit Punkt 3) des Lemma 5.4 bereits wissen, dass die Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ berechenbar ist, geben wir hier noch eine direktere Methode an. Wir definieren eine Folge von Relationen $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$:

- $q \sim_0 q'$ gdw. $q \in F \Leftrightarrow q' \in F$
- $q \sim_{k+1} q'$ gdw. $q \sim_k q'$ und $\forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_k \delta(q',a)$

Diese sind (Über-)Approximationen von $\sim_{\mathcal{A}}$ im folgenden Sinn.

Behauptung.
Für alle $k \geq 0$ gilt: $q \sim_k q'$ gdw. für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq k$: $w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'})$.

Beweis. Per Induktion über k:

Anfang: Nach Def. von $\sim_0$ gilt $q \sim_0 q'$ gdw. $\varepsilon \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{A}_{q'})$.

Schritt:

$$\begin{aligned}
q \sim_{k+1} q' \quad & \text{gdw.} \quad q \sim_k q' \text{ und } \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_k \delta(q',a) \\
& \text{gdw.} \quad \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}) \text{ und} \\
& \qquad \forall a \in \Sigma : \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q,a)}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q',a)}) \\
& \text{gdw.} \quad \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k+1 : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'})
\end{aligned}$$

□

Offensichtlich gilt $Q \times Q \supseteq \sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \sim_2 \supseteq \ldots$. Da Q endlich ist, gibt es ein $k \geq 0$ mit $\sim_k = \sim_{k+1}$. Wir zeigen, dass $\sim_k$ die gewünschte Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ ist. Nach obiger Behauptung und Definition von $\sim_{\mathcal{A}}$ gilt offensichtlich $\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_k$. Um $\sim_k \subseteq \sim_{\mathcal{A}}$ zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil $\sim_k \not\subseteq \sim_{\mathcal{A}}$ an. Wähle q, q' mit $q \sim_k q'$ und $q \not\sim_{\mathcal{A}} q'$. Es gibt also ein $w \in \Sigma^*$ mit $w \in L(\mathcal{A}_q)$ und $w \notin L(\mathcal{A}_{q'})$. Mit obiger Behauptung folgt $q \not\sim_n q'$ für $n = |w|$. Da $\sim_k \subseteq \sim_i$ für all $i \geq 0$ folgt $q \not\sim_k q'$, ein Widerspruch.

Beispiel 5.2 (Fortsetzung)
Für den Automaten aus Beispiel 5.2 gilt:

- $\sim_0$ hat die Klassen $F = \{q_0, q_1, q_2\}$ und $Q \setminus F = \{q_3\}$.
- $\sim_1$ hat die Klassen $\{q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_3\}$.
  Zum Beispiel ist $\delta(q_0, b) = \delta(q_2, b) \in F$ und $\delta(q_1, b) \notin F$.
- $\sim_2 = \sim_1 = \sim_{\mathcal{A}}$.

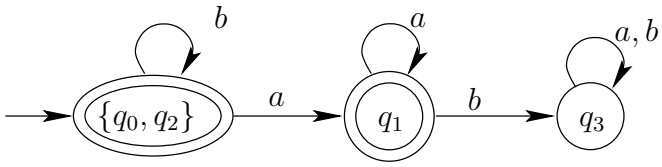
In der nachfolgenden Konstruktion werden äquivalente Zustände zusammengefasst, indem die Äquivalenzklasse $[q]_{\mathcal{A}}$ selbst zu den Zuständen gemacht werden. Jede Klasse verhält sich dann genau wie die in ihr enthaltenen Zustände im ursprünglichen Automaten.

Definition 5.5 (Quotientenautomat)
Der *Quotientenautomat* $\widetilde{\mathcal{A}} = (\widetilde{Q}, \Sigma, [q_0]_{\mathcal{A}}, \widetilde{\delta}, \widetilde{F})$ *zu* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ist definiert durch:

- $\widetilde{Q} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in Q\}$
- $\widetilde{\delta}([q]_{\mathcal{A}}, a) := [\delta(q, a)]_{\mathcal{A}}$ (repräsentantenunabhängig wegen Lemma 5.4)
- $\widetilde{F} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in F\}$

Nach Lemma 5.4 kann der Quotientenautomat in polynomieller Zeit konstruiert werden.

Beispiel 5.2 (Fortsetzung)
Für den Automaten aus Beispiel 5.2 ergibt sich der folgende Quotientenautomat:



Lemma 5.6
$\widetilde{\mathcal{A}}$ *ist äquivalent zu* $\mathcal{A}$.

Beweis. Man zeigt leicht per Induktion über $|w|$:

$$\widetilde{\delta}([q_0]_{\mathcal{A}}, w) = [\delta(q_0, w)]_{\mathcal{A}} \text{ für alle } w \in \Sigma^*. \qquad (*)$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{lll} w \in L(\mathcal{A}) & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, w) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & [\delta(q_0, w)]_{\mathcal{A}} \in \widetilde{F} \qquad \text{(Def. } \widetilde{F}\text{)} \\ & \underline{\text{gdw}}. & \widetilde{\delta}([q_0]_{\mathcal{A}}, w) \in \widetilde{F} \qquad (*) \\ & \underline{\text{gdw}}. & w \in L(\widetilde{\mathcal{A}}) \end{array}$$

□

Die folgende Definition fasst die beiden Minimierungs-Schritte zusammen:

Definition 5.7 (reduzierter Automat zu einem DEA)
Für einen DEA $\mathcal{A}$ bezeichnet $\mathcal{A}_{red}$ den *reduzierten Automaten*, den man aus $\mathcal{A}$ durch Eliminieren unerreichbarer Zustände und nachfolgendes Bilden des Quotientenautomaten erhält.

Wir wollen zeigen, dass der reduzierte Automat nicht weiter vereinfacht werden kann: $\mathcal{A}_{red}$ ist der kleinste DEA (bezüglich der Zustandszahl), der $L(\mathcal{A})$ erkennt. Um den Beweis führen zu können, benötigen wir als Hilfsmittel eine Äquivalenzrelation auf Wörtern, die sogenannte Nerode-Rechtskongruenz.

Nerode-Rechtskongruenz

Die Nerode-Rechtskongruenz ist auch unabhängig von reduzierten Automaten von Interesse und hat neben dem bereits erwähnten Beweis weitere interessante Anwendungen, von denen wir zwei kurz darstellen werden: sie liefert eine von Automaten unabhängige Charakterisierung der erkennbaren Sprachen und stellt ein weiteres Mittel zur Verfügung, um von einer Sprache nachzuweisen, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Im Gegensatz zur Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ auf den Zuständen eines Automaten handelt es sich hier um eine Relation *auf Wörtern.*

Definition 5.8 (Nerode-Rechtskongruenz)
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Für $u, v \in \Sigma^*$ definieren wir:
$u \simeq_L v$ gdw. $\forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.

Man beachte, dass das Wort w in Definition 5.8 auch gleich ε sein kann. Darum folgt aus $u \simeq_L v$, dass $u \in L \Leftrightarrow v \in L$.

Beispiel 5.9
Wir betrachten die Sprache $L = b^*a^*$ (vgl. Beispiele 1.7, 5.2).

- Es gilt:
  $\varepsilon \simeq_L b$: $\quad \forall w : \varepsilon w \in L$ gdw. $w \in L$
  gdw. $w \in b^*a^*$
  gdw. $bw \in b^*a^*$
  gdw. $bw \in L$
- $\varepsilon \not\simeq_L a$: $\quad \varepsilon b \in L$, aber $a \cdot b \notin L$

Wie zeigen nun, dass es sich bei $\simeq_L$ wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt. In der Tat ist $\simeq_L$ sogar eine Kongruenzrelation bezüglich Konkatenation von beliebigen Wörtern „von rechts“. Im folgenden bezeichnet der *Index* eine Äquivalenzrelation die Anzahl ihrer Klassen.

Lemma 5.10 (Eigenschaften von $\simeq_L$)

1) $\simeq_L$ ist eine Äquivalenzrelation.

2) $\simeq_L$ ist Rechtskongruenz, d.h. zusätzlich zu 1) gilt: $u \simeq_L v \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : uw \simeq_L vw$.

3) L ist Vereinigung von $\simeq_L$-Klassen:

$$L = \bigcup_{u \in L} [u]_L$$

wobei $[u]_L := \{v \mid u \simeq_L v\}$.

4) Ist $L = L(\mathcal{A})$ für einen DEA $\mathcal{A}$, so ist die Anzahl Zustände $\geq$ größer oder gleich dem Index von $\simeq$.

Beweis.

1) folgt aus der Definition von $\simeq_L$, da „$\Leftrightarrow$“ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

2) Damit $uw \simeq_L vw$ gilt, muss für alle $w' \in \Sigma^*$ gelten:
   $(\star)$ $\quad uww' \in L \Leftrightarrow vww' \in L$
   Wegen $ww' \in \Sigma^*$ folgt $(\star)$ aus $u \simeq_L v$.

3) Zeige $L = \bigcup_{u \in L} [u]_L$.

   „$\subseteq$“: Wenn $u \in L$, dann ist $[u]_L$ in der Vereinigung rechts; zudem gilt $u \in [u]_L$.

   „$\supseteq$“: Sei $u \in L$ und $v \in [u]_L$.
   Wegen $\varepsilon \in \Sigma^*$ folgt aus $u = u \cdot \varepsilon \in L$ und $v \simeq_L u$ auch $v = v \cdot \varepsilon \in L$.

4) Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein DEA mit $L = L(\mathcal{A})$.

   Wir zeigen: $\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v)$ impliziert $u \simeq_L v$:

   $$\begin{array}{lll} \forall w : uw \in L & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, uw) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta(\delta(q_0, u), w) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta(\delta(q_0, v), w) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, vw) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & vw \in L \end{array}$$

   Also folgt aus $u \not\simeq_L v$, dass $\delta(q_0, u) \neq \delta(q_0, v)$ und damit gibt es mindestens so viele Zustände wie $\simeq$-Klassen (Schubfachprinzip).

□

Beispiel 5.9 (Fortsetzung)
$\simeq_L$ hat drei Klassen:

- $[\varepsilon]_L = b^*$
- $[a]_L = b^*aa^*$
- $[ab]_L = (a+b)ab(a+b)$

Eine interessante Eigenschaft von $\simeq_L$ ist, dass die Äquivalenzklassen zur Definition eines kanonischen Automaten $\mathcal{A}_L$ verwendet werden können, der L erkennt. Dieser Automat ergibt sich *direkt* und *auf eindeutige Weise* aus der Sprache L (im Gegensatz zum reduzierten Automaten, für dessen Konstruktion man bereits einen Automaten für die betrachtete Sprache haben muss). Damit wir einen endlichen Automaten erhalten, dürfen wir die Konstruktion nur auf Sprachen L anwenden, für die $\simeq_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen hat.

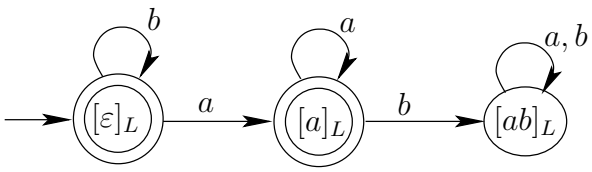
Definition 5.11 (Kanonischer DEA $\mathcal{A}_L$ zu einer Sprache L)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache, so dass $\simeq_L$ endlichen Index hat. Der *kanonische DEA* $\mathcal{A}_L = (Q', \Sigma, q_0', \delta', F')$ zu L ist definiert durch:

- $Q' := \{[u]_L \mid u \in \Sigma^*\}$

- $q_0' := [\varepsilon]_L$
- $\delta'([u]_L, a) := [ua]_L$ (repräsentantenunabhängig wegen Lemma 5.10, Punkt 2)
- $F' := \{[u]_L \mid u \in L\}$

Man beachte, dass $\mathcal{A}_L$ mit Punkt 4 von Lemma 5.10 eine minimale Anzahl von Zuständen hat: es gibt keinen DEA, der $L(\mathcal{A}_L)$ erkennt und weniger Zustände hat.

Beispiel 5.9 (Fortsetzung)
Für die Sprache $L = b^*a^*$ ergibt sich damit folgender kanonischer Automat $\mathcal{A}_L$:



Lemma 5.12
Hat $\simeq_L$ endlichen Index, so ist $\mathcal{A}_L$ ein DEA mit $L = L(\mathcal{A}_L)$.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{array}{lcll} L(\mathcal{A}_L) & = & \{u \mid \delta'(q_0', u) \in F'\} & \\ & = & \{u \mid \delta'([\varepsilon]_L, u) \in F'\} & \text{(Def. } q_0'\text{)} \\ & = & \{u \mid [u]_L \in F'\} & \text{(wegen } \delta'([\varepsilon]_L, u) = [u]_L\text{)} \\ & = & \{u \mid u \in L\} & \text{(Def. } F'\text{)} \\ & = & L & \end{array}$$

□

Das folgende Resultat ist eine interessante Anwendung der Nerode-Rechtskongruenz und des kanonischen Automaten. Es liefert eine Charakterisierung von erkennbaren Sprachen, die vollkommen unabhängig von endlichen Automaten ist.

Satz 5.13 (Satz von Myhill und Nerode)
Eine Sprache L ist erkennbar gdw. $\simeq_L$ endlichen Index hat.

Beweis.

„⇒“: Ergibt sich unmittelbar aus Lemma 5.10, 4).

„⇐“: Ergibt sich unmittelbar aus Lemma 5.12, da $\mathcal{A}_L$ DEA ist, der L erkennt.

□

Der Satz von Nerode liefert uns als Nebenprodukt eine weitere Methode, von einer Sprache zu beweisen, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Beispiel 5.14 (nichterkennbare Sprache)
Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar, da für $n \neq m$ gilt: $a^n \not\simeq_L a^m$. In der Tat gilt $a^n b^n \in L$, aber $a^m b^n \notin L$. Daher hat $\simeq_L$ unendlichen Index.

Wir zeigen nun, dass

Satz 5.15 (Minimalität des reduzierten DEA)
Sei $\mathcal{A}$ ein DEA. Dann hat jeder DEA, der $L(\mathcal{A})$ erkennt, mindestens so viele Zustände wie der reduzierte DEA $\mathcal{A}_{red}$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}_{red} = (\widetilde{Q}, \Sigma, [q_0]_\mathcal{A}, \widetilde{\delta}, \widetilde{F})$. Wir definieren eine injektive Abbildung π, die jedem Zustand aus $\widetilde{Q}$ eine Äquivalenzklasse von $\simeq_L$ zuordnet. Es folgt, dass $\mathcal{A}_{red}$ *höchstens* so viele Zustände hat, wie $\simeq_L$ Äquivalenzklassen (Schubfachprinzip), also ist er nach Punkt 4 von Lemma 5.10 minimal.

Sei $[q]_\mathcal{A} \in \widetilde{Q}$. Nach Definition von $\mathcal{A}_{red}$ ist q in $\mathcal{A}$ von q_0 erreichbar mit einem Wort w_q. Setze $\pi([q]_\mathcal{A}) = [w_q]_L$.

Es bleibt, zu zeigen, dass π injektiv ist. Seien $[q]_\mathcal{A}, [p]_\mathcal{A} \in \widetilde{Q}$ mit $[q]_\mathcal{A} \neq [p]_\mathcal{A}$. Dann gilt $q \not\sim_\mathcal{A} p$ und es gibt $w \in \Sigma^*$ so dass

$$\delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(p, w) \in F$$

nicht gilt. Nach Wahl von w_p und w_q gilt dann aber auch

$$\delta(q_0, w_q w) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_p w) \in F$$

nicht und damit auch nicht

$$w_q w \in L \Leftrightarrow w_p w \in L$$

Es folgt $w_q \not\simeq_L w_p$, also $\pi([q]_\mathcal{A}) \neq \pi([p]_\mathcal{A})$ wie gewünscht. □

Es ist also sowohl der reduzierte Automat als auch der kanonische Automat von minimaler Größe. In der Tat ist der Zusammenhang zwischen beiden Automaten sogar noch viel enger: man kann zeigen, dass sie identisch bis auf Zustandsumbenennung sind. Formal wird das durch den Begriff der Isomorphie beschrieben.

Definition 5.16 (isomorph)
Zwei DEAs $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q_0', \delta', F')$ sind *isomorph* (geschrieben $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$) gdw. es eine Bijektion $\pi : Q \to Q'$ gibt mit:

- $\pi(q_0) = q_0'$
- $\pi(F) = \{\pi(q) \mid q \in F\} = F'$, wobei $\pi(F) = \{\pi(q) \mid q \in F\}$
- $\pi(\delta(q, a)) = \delta'(\pi(q), a)$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$

Lemma 5.17
$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \;\Rightarrow\; L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$

Beweis. Es sei $\pi : Q \to Q'$ der Isomorphismus. Durch Induktion über $|w|$ zeigt man leicht, dass $\pi(\delta(q, w)) = \delta'(\pi(q), w)$. Daher gilt:

$$\begin{array}{lll} w \in L(\mathcal{A}) & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, w) \in F \\ & \underline{\text{gdw}}. & \pi(\delta(q_0, w)) \in F' \qquad (\text{wegen } \pi(F) = F') \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta'(\pi(q_0), w) \in F' \\ & \underline{\text{gdw}}. & \delta'(q_0', w) \in F' \qquad (\text{wegen } q_0' = \pi(q_0)) \\ & \underline{\text{gdw}}. & w \in L(\mathcal{A}') \quad \square \end{array}$$

Wir können nun Minimalität und Eindeutigkeit des reduzierten Automaten zeigen.

Satz 5.18 (Isomorphie reduzierter und kanonischer Automat)
Es sei L eine erkennbare Sprache und $\mathcal{A}$ ein DEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Dann gilt: der reduzierte Automat $\mathcal{A}_{red} := \widetilde{\mathcal{A}}_0$ ist isomorph zum kanonischen Automaten $\mathcal{A}_L$.

Beweis. Es sei $\mathcal{A}_{red} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}_L = (Q', \Sigma, q_0', \delta', F')$. Wir definieren eine Funktion $\pi : Q \to Q'$ und zeigen, dass sie ein Isomorphismus ist. Für jedes $q \in Q$ existiert (mindestens) ein $w_q \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, w_q) = q$, da in $\mathcal{A}_{red}$ alle Zustände erreichbar sind. O.B.d.A. sei $w_{q_0} = \varepsilon$. Wir definieren $\pi(q) := [w_q]_L$.

I) π ist injektiv:
Wir müssen zeigen, dass aus $p \neq q$ auch $[w_p]_L \neq [w_q]_L$ folgt.
Da $\mathcal{A}_{red}$ reduziert ist, sind verschiedene Zustände nicht äquivalent. Es gibt also mindestens ein w, für das

$$\delta(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q, w) \in F$$

<u>nicht</u> gilt. Das heißt aber, dass

$$\delta(q_0, w_p w) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_q w) \in F$$

nicht gilt und damit wiederum, dass $w_p w \in L \Leftrightarrow w_q w \in L$ nicht gilt. Also ist $w_p \not\equiv_L w_q$, d.h. $[w_p]_L \neq [w_q]_L$.

II) π ist surjektiv:
Folgt aus Injektivität und $|Q| \geq |Q'|$ (Punkt 4 Lemma 5.10).

III) $\pi(q_0) = q_0'$:
Da $w_{q_0} = \varepsilon$ und $q_0' = [\varepsilon]_L$.

IV) $\pi(F) = F'$:

$$\begin{array}{lll} q \in F & \underline{\text{gdw}}. & \delta(q_0, w_q) \in F \qquad (\text{Wahl } w_q) \\ & \underline{\text{gdw}}. & w_q \in L \\ & \underline{\text{gdw}}. & [w_q]_L \in F' \qquad (\text{Def. } F') \\ & \underline{\text{gdw}}. & \pi(q) \in F' \end{array}$$

V) $\pi(\delta(q,a)) = \delta'(\pi(q),a)$:
Als Abkürzung setze $p = \delta(q,a)$. Die Hilfsaussage

$$\delta(q_0, w_p) = \delta(q_0, w_q a) \qquad (*)$$

gilt wegen:

$$\begin{array}{rcll} \delta(q_0,w_p) & = & p & \text{(Wahl } w_p\text{)} \\ & = & \delta(q,a) & \\ & = & \delta(\delta(q_0,w_q),a) & \text{(Wahl } w_q\text{)} \\ & = & \delta(q_0,w_q a) & \end{array}$$

Mittels $(*)$ zeigen wir nun:

$$\begin{array}{rcll} \pi(p) & = & [w_p]_L & \text{(Def. } \pi\text{)} \\ & = & [w_q a]_L & \text{(folgt aus } (*) \text{ und } L(\mathcal{A}_{red}) = L\text{)} \\ & = & \delta'([w_q]_L, a) & \text{(Def. } \mathcal{A}_L\text{)} \\ & = & \delta'(\pi(q),a) & \text{(Def. } \pi\text{)} \end{array}$$

□

Dieser Satz zeigt auch folgende interessante Eigenschaften:

- der reduzierte Automat $\mathcal{A}_{red}$ ist unabhängig vom ursprünglichen DEA $\mathcal{A}$:
  wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$, dann gilt wegen $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{red}$ auch $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{B}_{red}$ (denn die Komposition zweier Isomorphismen ergibt wieder einen Isomorphismus);
- Für jede erkennbare Sprache L gibt es einen eindeutigen minimalen DEA:
  Wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$ und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ minimale Zustandszahl unter allen DEAs haben, die L erkennen, dann enthalten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ weder unerreichbare noch äquivalente Zustände und der jeweilige reduzierte Automat ist identisch zum ursprünglichen Automaten. Damit gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{red} = \mathcal{B}$, also auch $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Im Prinzip liefert Satz 5.18 zudem eine Methode, um von zwei Automaten zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren:

Korollar 5.19
Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ DEAs. Dann gilt: $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ gdw. $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}'_{red}$.

Man kann die reduzierten Automaten wie beschrieben konstruieren. Für gegebene Automaten kann man feststellen, ob sie isomorph sind (teste alle Bijektionen). Da es exponentiell viele Kandidaten für eine Bijektion gibt, ist diese Methode nicht optimal.

Hat man NEAs an Stelle von DEAs gegeben, so kann man diese zuerst deterministisch machen und dann das Korollar anwenden.

Zum Abschluss von Teil I erwähnen wir einige hier aus Zeitgründen nicht behandelte Themenbereiche:

Andere Varianten von endlichen Automaten:

NEAs/DEAs mit Ausgabe (sogenannte *Transduktoren*) haben Übergänge $p \xrightarrow{a/v}_{\mathcal{A}} q$, wobei $v \in \Gamma^*$ ein Wort über einem Ausgabealphabet ist. Solche Automaten beschreiben Funktionen $\Sigma^* \to \Gamma^*$. *2-Wege Automaten* können sich sowohl vorwärts als auch rückwärts auf der Eingabe bewegen. *Alternierende Automaten* generalisieren NEAs: zusätzlich zu den nicht-deterministischen Übergängen, die einer existentiellen Quantifizierung entsprechen, gibt es hier auch universell quantifizierte Übergänge.

Algebraische Theorie formaler Sprachen:

Jeder Sprache L wird ein Monoid M_L (syntaktisches Monoid) zugeordnet. Klassen von Sprachen entsprechen dann Klassen von Monoiden, z.B. L ist regulär gdw. M_L endlich. Dies ermöglicht einen sehr fruchtbaren algebraischen Zugang zur Automatentheorie.

Automaten auf unendlichen Wörtern:

Hier geht es um Automaten, die unendliche Wörter (unendliche Folgen von Symbolen) als Eingabe erhalten. Die Akzeptaz via Endzustand funktioniert hier natürlich nicht mehr und man studiert verschiedene Akzeptanzbedingungen wie z.B. Büchi-Akzeptanz und Rabin-Akzeptanz.

Baumautomaten:

Diese Automaten erhalten Bäume statt Wörter als Eingabe. Eine streng lineare Abarbeitung wie bei Wörtern ist in diesem Fall natürlich nicht möglich. Man unterscheidet zwischen Top-Down und Bottom-Up Automaten.

II. Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

Einführung

Der zweite Teil beschäftigt sich hauptsächlich mit der Klasse der kontextfreien Sprachen sowie mit Kellerautomaten, dem zu dieser Sprachfamilie passenden Automatenmodell. Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist allgemeiner als die der regulären Sprachen und dementsprechend können Kellerautomaten als eine Erweiterung von endlichen Automaten verstanden werden. Kontextfreie Sprachen spielen in der Informatik eine wichtige Rolle, da durch sie z.B. die Syntax von Programmiersprachen (zumindest in großen Teilen) beschreibbar ist.

Bevor wir uns im Detail den kontextfreien Sprachen zuwenden, führen wir Grammatiken als allgemeines Mittel zum Generieren von formalen Sprachen ein. Wir werden sehen, dass sich sowohl die regulären als auch die kontextfreien Sprachen und weitere, noch allgemeinere Sprachklassen mittels Grammatiken definieren lassen. Diese Sprachklassen sind angeordnet in der bekannten Chomsky-Hierarchie von formalen Sprachen.

6. Die Chomsky-Hierarchie

Grammatiken dienen dazu, Wörter zu erzeugen. Man hat dazu *Regeln*, die es erlauben, ein Wort durch ein anderes Wort zu ersetzen (aus ihm abzuleiten). Die *erzeugte Sprache* ist die Menge der Wörter, die ausgehend von einem *Startsymbol* durch wiederholtes Ersetzen erzeugt werden können.

Beispiel 6.1

Regeln:	$S \longrightarrow aSb$	(1)
	$S \longrightarrow \varepsilon$	(2)
Startsymbol:	S	

Eine mögliche Ableitung eines Wortes ist:

$S \xrightarrow{1} aSb \xrightarrow{1} aaSbb \xrightarrow{1} aaaSbbb \xrightarrow{2} aaabbb$

Das Symbol S ist hier ein Hilfssymbol (*nichtterminales Symbol*) und man ist nur an erzeugten Wörtern interessiert, die das Hilfssymbol nicht enthalten (*Terminalwörter*). Man sieht leicht, dass dies in diesem Fall genau die Wörter $a^n b^n$ mit $n \geq 0$ sind.

Definition 6.2 (Grammatik)

Eine *Grammatik* ist von der Form $G = (N, \Sigma, P, S)$, wobei

- N und Σ endliche, disjunkte Alphabete von *Nichtterminalsymbolen* bzw. *Terminalsymbolen* sind,
- $S \in N$ das *Startsymbol* ist,
- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von Ersetzungsregeln (*Produktionen*) ist.

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir Produktionen $(u, v) \in P$ gewöhnlich als $u \longrightarrow v$.

Man beachte, dass die rechte Seite von Produktionen aus dem leeren Wort bestehen darf, die linke jedoch nicht. Ausserdem sei darauf hingewiesen, dass sowohl Nichtterminalsymbole als auch Terminalsymbole durch eine Ersetzungsregel ersetzt werden dürfen.

Beispiel 6.3

Folgendes Tupel ist eine Grammatik: $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, B\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $P = \{S \longrightarrow aSBc,$
  $S \longrightarrow abc,$
  $cB \longrightarrow Bc,$
  $bB \longrightarrow bb\}$

Im Folgenden schreiben wir meistens Elemente von N mit Grossbuchstaben und Elemente von Σ mit Kleinbuchstaben.

Wir definieren nun, was es heißt, dass man ein Wort durch Anwenden der Regeln aus einem anderen ableiten kann.

Definition 6.4 (durch eine Grammatik erzeugte Sprache)
Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und x, y Wörter aus $(N \cup \Sigma)^*$.

1) *y aus x direkt ableitbar:*
   $x \vdash_G y$ gdw. $x = x_1 u x_2$ und $y = x_1 v x_2$ mit $u \longrightarrow v \in P$ und $x_1, x_2 \in (N \cup \Sigma)^*$
2) *y aus x in n Schritten ableitbar:*
   $x \vdash_G^n y$ gdw. $x \vdash_G x_2 \vdash_G \cdots \vdash_G x_{n-1} \vdash_G y$ für $x_2, \ldots, x_{n-1} \in (N \cup \Sigma)^*$
3) *y aus x ableitbar:*
   $x \vdash_G^* y$ gdw. $x \vdash_G^n y$ für ein $n \geq 0$
4) Die durch G *erzeugte Sprache* ist
   $L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \vdash_G^* w\}$.

Man ist also bei der erzeugten Sprache nur an den in G aus S ableitbaren Terminalwörtern interessiert.

Beispiel 6.3 (Fortsetzung)
Eine Beispielableitung in der Grammatik aus Beispiel 6.3:

$$\begin{aligned} S &\vdash_G abc, \text{ d.h. } abc \in L(G) \\ S &\vdash_G aSBc \\ &\vdash_G aaSBcBc \\ &\vdash_G aaabcBcBc \\ &\vdash_G aaabBccBc \\ &\vdash_G^2 aaabBBccc \\ &\vdash_G^2 aaabbbccc \end{aligned}$$

Die erzeugte Sprache ist $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

Beweis.

„$\supseteq$“: Für $n = 1$ ist $abc \in L(G)$ klar. Für $n > 1$ sieht man leicht:

$$S \vdash_G^{n-1} a^{n-1} S (Bc)^{n-1} \vdash_G a^n bc (Bc)^{n-1} \vdash_G^* a^n b B^{n-1} c^n \vdash_G^{n-1} a^n b^n c^n$$

„$\subseteq$“: Sei $S \vdash_G^* w$ mit $w \in \Sigma^*$. Offenbar wird die Regel $S \longrightarrow abc$ in der Ableitung von w genau einmal angewendet. Vor dieser Anwendung können nur die Regeln $S \longrightarrow aSBc$ und $cB \longrightarrow Bc$ angewendet werden, da noch keine b's generiert wurden. Die Anwendung von $S \longrightarrow abc$ hat damit die Form

$$a^n S u \vdash a^{n+1} bcu \text{ mit } u \in \{c, B\}^* \text{ und } |u|_B = |u|_c = n$$

(formaler Beweis per Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen). Nun sind nur noch $cB \longrightarrow Bc$ und $bB \longrightarrow bb$ angewendbar. Alle dabei entstehenden Wörter haben die folgende Form (formaler Beweis per Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen):

$$a^n b^k v \text{ mit } v \in \{c, B\}^*, \quad |v|_B = n - k \text{ und } |v|_c = n.$$

Jedes Terminalwort dieser Form erfüllt $|v|_B = 0$, also $n = k$ und damit hat das Wort die Form $a^n b^n c^n$.

□

Beispiel 6.5

Betrachte die Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, B\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \longrightarrow aS,$
  $S \longrightarrow bS,$
  $S \longrightarrow abB,$
  $B \longrightarrow aB,$
  $B \longrightarrow bB,$
  $B \longrightarrow \varepsilon\}$

Die erzeugte Sprache ist $L(G) = \Sigma^* \cdot \{a\} \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$

Die Grammatiken aus Beispiel 6.5, 6.3 und 6.1 gehören zu unterschiedlichen Sprachklassen, die alle durch Grammatiken erzeugt werden können. Sie sind angeordnet in der Chomsky-Hierarchie.

Definition 6.6 (Chomsky-Hierarchie, Typen von Grammatiken)

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- Jede Grammatik G ist Grammatik vom ***Typ 0***.
- G ist Grammatik vom ***Typ 1 (kontextsensitiv)***, falls alle Regeln *nicht verkürzend* sind, also die Form $w \longrightarrow u$ haben wobei $w, u \in (\Sigma \cup N)^*$ und $|u| \geq |w|$.

  Ausnahme: Die Regel $S \longrightarrow \varepsilon$ ist erlaubt, wenn S in keiner Produktion auf der rechten Seite vorkommt.
- G ist Grammatik vom ***Typ 2 (kontextfrei)***, falls alle Regeln die Form $A \longrightarrow w$ haben mit $A \in N, w \in (\Sigma \cup N)^*$.
- G ist Grammatik vom ***Typ 3 (rechtslinear)***, falls alle Regeln die Form $A \longrightarrow uB$ oder $A \longrightarrow u$ haben mit $A, B \in N$, $u \in \Sigma^*$.

Die *kontextfreien* Sprachen heißen deshalb so, weil die linke Seite jeder Produktion nur aus einem Nichtterminalsymbol A besteht, das unabhängig vom *Kontext im Wort* (also

dem Teilwort links von A und dem Teilwort rechts von A) ersetzt wird. Bei *kontextsensitiven* Grammatiken sind hingegen Regeln

$$u_1 A u_2 \longrightarrow u_1 w u_2$$

erlaubt wenn $|w| \geq 1$. Hier ist die Ersetzung von A durch w abhängig davon, dass der richtige Kontext (u_1 links und u_2 rechts, beides aus $(N \cup \Sigma)^*$) im Wort vorhanden ist. Man kann sogar zeigen, dass es keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, kontextfreie Grammatiken ausschließlich durch Regeln der obigen Form zu definieren.

Beachte auch: Bei allen Grammatiktypen ist es nach Definition erlaubt, dass ein Nichtterminal auf der linken Seite mehrerer Regeln verwendet wird.

Eine sehr wichtige Eigenschaft von kontextsensitiven Grammatiken ist, dass die Anwendung einer Produktion das Wort nicht verkürzen kann. Vor diesem Hintergrund ist auch die Ausnahme $S \longrightarrow \varepsilon$ zu verstehen: sie dient dazu, das leere Wort generieren zu können, was ohne Verkürzen natürlich nicht möglich ist. Wenn diese Regel verwendet wird, dann sind Regeln wie $aAb \to aSb$ aber implizit verkürzend, da Sie das Ableiten von ab aus aAb erlauben. Um das zu verhindern, darf in der Gegenwart von $S \longrightarrow \varepsilon$ das Symbol S nicht auf der rechten Seite von Produktionen verwendet werden.

Beispiel 6.7

Die Grammatik aus Beispiel 6.1 ist vom Typ 2. Sie ist nicht vom Typ 1, da $S \longrightarrow \varepsilon$ vorhanden ist, aber S auf der rechten Seite von Produktionen verwendet wird. Es gibt aber eine Grammatik vom Typ 1, die dieselbe Sprache erzeugt:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \varepsilon \\ S & \longrightarrow & S' \\ S' & \longrightarrow & ab \\ S' & \longrightarrow & aS'b \end{array}$$

Die Grammatik aus Beispiel 6.3 ist vom Typ 1. Wir werden später sehen, dass es keine Grammatik vom Typ 2 gibt, die die Sprache aus diesem Beispiel generiert. Die Grammatik aus Beispiel 6.5 ist vom Typ 2.

Die unterschiedlichen Typen von Grammatiken führen zu unterschiedlichen *Typen von Sprachen.*

Definition 6.8 (Klasse der Typ-i-Sprachen)

Für $i = 0, 1, 2, 3$ ist die *Klasse der Typ-i-Sprachen definiert* als

$$\mathcal{L}_i := \{L(G) \mid G \text{ ist Grammatik vom Typ i}\}.$$

Nach Definition kann eine Grammatik vom Typ i auch Sprachen höheren Typs $j \geq i$ generieren (aber nicht umgekehrt). So erzeugt beispielsweise die folgende Typ-1 Gram-

matik die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, welche nach Beispiel 6.1 vom Typ 2 ist:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \\ S &\longrightarrow ab \\ S &\longrightarrow aXb \\ aXb &\longrightarrow aaXbb \\ X &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede Grammatik von Typ 3 auch eine vom Typ 2 und jede Grammatik von Typ 1 auch eine vom Typ 0. Da Grammatiken vom Typ 2 und 3 das Verkürzen des abgeleiteten Wortes erlauben, sind solche Grammatiken nicht notwendigerweise vom Typ 1. Wir werden jedoch später sehen, dass jede Typ 2 Grammatik in eine Typ 1 Grammatik gewandelt werden kann, die dieselbe Sprache erzeugt. Daher bilden die assoziierten Sprachtypen eine Hierarchie. Diese ist sogar strikt.

Lemma 6.9
$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$

Beweis. Nach Definition der Grammatiktypen gilt offenbar $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$. Die Inklusion $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ werden wir später zeigen (Satz 8.12). Auch die Striktheit der Inklusionen werden wir erst später beweisen. □

7. Rechtslineare Grammatiken und reguläre Sprachen

Wir zeigen, dass rechtslineare Grammatiken genau die erkennbaren Sprachen generieren. Damit haben wir eine weitere, unabhängige Charakterisierung dieser Klassen von Sprachen gefunden und alle Resultate, die wir bereits für die erkennbaren Sprachen bewiesen haben, gelten auch für Typ 3-Sprachen.

Satz 7.1
Die Typ-3-Sprachen sind genau die regulären/erkennbaren Sprachen, d.h.
$\mathcal{L}_3 = \{L \mid L \text{ ist regulär}\}$.

Beweis. Der Beweis wird in zwei Richtungen durchgeführt:

1. Jede Typ-3-Sprache ist erkennbar

   S $L \in \mathcal{L}_3$, d.h. $L = L(G)$ für eine Typ-3-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$. Es gilt $w_1 \cdots w_n \in L(G)$ gdw. es gibt eine Ableitung

   $$(\star) \quad S = B_0 \vdash_G w_1 B_1 \vdash_G w_1 w_2 B_2 \vdash_G \ldots \vdash_G w_1 \ldots w_{n-1} B_{n-1} \vdash_G w_1 \ldots w_{n-1} w_n$$

   für Produktionen $B_{i-1} \longrightarrow w_i B_i \in P \quad (i = 1, \ldots, n)$ und $B_{n-1} \longrightarrow w_n \in P$.

   Diese Ableitung ähnelt dem Lauf eines NEA auf dem Wort $w_1 \cdots w_n$, wobei die Nichtterminale die Zustände sind und die Produktionen die Übergänge beschreiben.

   Wir konstruieren nun einen *NEA mit Worttransitionen*, der die Nichtterminalsymbole von G als Zustände hat:

   $\mathcal{A} = (N \cup \{\Omega\}, \Sigma, S, \Delta, \{\Omega\})$, wobei

   - $\Omega \notin N$ Endzustand ist und
   - $\Delta = \{(A, w, B) \mid A \longrightarrow wB \in P\} \cup \{(A, w, \Omega) \mid A \longrightarrow w \in P\}$.

   Ableitungen der Form $(\star)$ entsprechen nun genau Pfaden in $\mathcal{A}$:

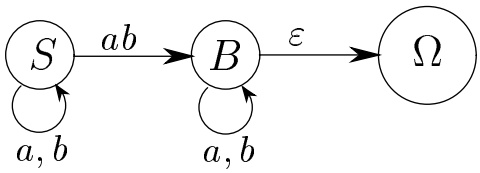
   $$(\star\star) \quad (S, w_1, B_1)(B_1, w_2, B_2) \ldots (B_{n-2}, w_{n-1}, B_{n-1})(B_{n-1}, w_n, \Omega)$$

   Dies zeigt $L(\mathcal{A}) = L(G)$.

   Beispiel 6.5 (Fortsetzung)
   Die Grammatik

   $$\begin{aligned} P = \quad \{&S \longrightarrow aS, \\ &S \longrightarrow bS, \\ &S \longrightarrow abB, \\ &B \longrightarrow aB, \\ &B \longrightarrow bB, \\ &B \longrightarrow \varepsilon\} \end{aligned}$$

   liefert den folgenden NEA mit Wortübergängen:



2. Jede erkennbare Sprache ist eine Typ-3-Sprache

   Sei $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$. Wir definieren daraus eine Typ-3-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} N &:= Q \\ S &:= q_0 \\ P &:= \{p \longrightarrow aq \mid (p, a, q) \in \Delta\} \cup \{p \longrightarrow \varepsilon \mid p \in F\} \end{aligned}$$

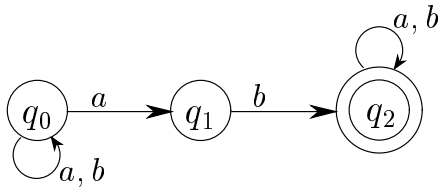
   Ein Pfad in $\mathcal{A}$ der Form

$$(q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \ldots (q_{n-1}, a_n, q_n)$$

   mit $q_n \in F$ entspricht nun genau einer Ableitung

$$q_0 \vdash_G a_1 q_1 \vdash_G a_1 a_2 q_2 \vdash_G \ldots \vdash_G a_1 \ldots a_n q_n \vdash_G a_1 \ldots a_n.$$

   Beispiel:
   Der folgende NEA



   liefert die Grammatik mit den rechtslinearen Produktionen

$$\begin{aligned} P = \quad \{q_0 &\longrightarrow aq_0, \\ q_0 &\longrightarrow bq_0, \\ q_0 &\longrightarrow aq_1, \\ q_1 &\longrightarrow bq_2, \\ q_2 &\longrightarrow aq_2, \\ q_2 &\longrightarrow bq_2, \\ q_2 &\longrightarrow \varepsilon\} \end{aligned}$$

□

Korollar 7.2
$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$ gilt. Außerdem haben wir mit Beispiel 6.1 $L := \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_2$. Wir haben bereits gezeigt, dass L nicht erkennbar/regulär ist, d.h. mit Satz 7.1 folgt $L \notin \mathcal{L}_3$. □

Beispiel 7.3

Als ein weiteres Beispiel für eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist, betrachten wir $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$. (Vgl. Beispiele 2.2, 3.2) Man kann diese Sprache mit folgender kontextfreien Grammatik erzeugen:

$G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, S_{\geq}, S_{\leq}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \longrightarrow aS_{\geq}, \quad S \longrightarrow S_{\leq}b,$
  $S_{\geq} \longrightarrow aS_{\geq}b, \quad S_{\leq} \longrightarrow aS_{\leq}b,$
  $S_{\geq} \longrightarrow aS_{\geq}, \quad S_{\leq} \longrightarrow S_{\leq}b,$
  $S_{\geq} \longrightarrow \varepsilon, \quad S_{\leq} \longrightarrow \varepsilon\}$

Es gilt nun:

- $S_{\geq} \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = a^n b^m$ mit $n \geq m$,
- $S_{\leq} \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = a^n b^m$ mit $n \leq m$,

woraus sich ergibt:

- $S \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = aa^n b^m$ mit $n \geq m$ oder $w = a^n b^m b$ mit $n \leq m$,

d.h. $L(G) = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

8. Normalformen und Entscheidungsprobleme

Es existieren verschiedene *Normalformen* für kontextfreie Grammatiken, bei denen die syntaktische Form der Regeln weiter eingeschränkt wird, ohne dass die Klasse der erzeugten Sprachen sich ändert. Wir werden insbesondere die *Chomsky Normalform* kennenlernen und sie verwenden, um einen effizienten Algorithmus für das Wortproblem für kontextfreie Sprachen zu entwickeln. Zudem ist jede kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform auch eine Typ-1 Grammatik, was die noch ausstehende Inklusion $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ zeigt. Wir werden auch das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem diskutieren.

Zwei Grammatiken heißen *äquivalent*, falls sie dieselbe Sprache erzeugen.

Zunächst zeigen wir, wie man „überflüssige“ Symbole aus kontextfreien Grammatiken eliminieren kann. Das ist zum späteren Herstellen der Chomsky-Normalform nicht unbedingt notwendig, es ist aber trotzdem ein natürlicher erster Schritt zum Vereinfachen einer Grammatik.

Definition 8.1 (terminierende, erreichbare Symbole; reduzierte Grammatik)
Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1) $A \in N$ heißt *terminierend*, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit $A \vdash_G^* w$.
2) $A \in N$ heißt *erreichbar*, falls es $u, v \in (\Sigma \cup N)^*$ gibt mit $S \vdash_G^* uAv$.
3) G heißt *reduziert*, falls alle Elemente von N *erreichbar* und *terminierend* sind.

Die folgenden zwei Lemmata bilden die Grundlage zum wandeln einer kontextfreien Grammatik in eine reduzierte Kontextfreie Grammatik.

Lemma 8.2
Für jede kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man die Menge der terminierenden Symbole berechnen.

Beweis. Wir definieren dazu

$$T_1 := \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \longrightarrow w \in P\}$$
$$T_{i+1} := T_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (\Sigma \cup T_i)^* : A \longrightarrow w \in P\}$$

Es gilt

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq N.$$

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $T_k = T_{k+1} = \bigcup_{i \geq 1} T_i$.

Behauptung:
$T_k = \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend}\}$, denn:

„$\subseteq$“: Zeige durch Induktion über i: alle Elemente von T_i, $i \geq 1$, terminierend:

- $i = 1$: $\quad A \in T_1 \Rightarrow A \vdash_G w \in \Sigma^*$, also A terminierend.
- $i \to i+1$: $A \in T_{i+1} \Rightarrow A \vdash_G u_1 B_1 u_2 B_2 \cdots u_n B_n u_{n+1}$ mit $u_j \in \Sigma^*$ und $B_j \in T_j$, also (Induktion) $B_j \vdash_G^* w_j \in \Sigma^*$. Es folgt, dass A terminierend.

„$\supseteq$“: Zeige durch Induktion über i:

$A \vdash_G^{\leq i} w \in \Sigma^* \Rightarrow A \in T_i$.

- $i = 1$: $\quad A \vdash_G^{\leq 1} w \in \Sigma^* \Rightarrow A \longrightarrow w \in P \Rightarrow A \in T_1$
- $i \to i+1$: $A \vdash_G^{\leq i+1} w \in \Sigma^*$
  $\Rightarrow A \vdash_G u_1 B_1 \cdots u_n B_n u_{n+1} \vdash_G^{\leq i} u_1 w_1 \cdots u_n w_n u_{n+1} = w$,
  mit $u_j \in \Sigma^*$ und $B_j \vdash_G^{\leq i} w_j \in \Sigma^*$
  $\Rightarrow B_j \in T_i$ für alle j (Induktion)
  $\Rightarrow A \in T_{i+1}$

□

Beispiel 8.3

$$P = \{ \quad \begin{array}{ll} S \longrightarrow A, & S \longrightarrow aCbBa, \\ A \longrightarrow aBAc, & B \longrightarrow Cab, \\ C \longrightarrow AB, & C \longrightarrow aa, \end{array}$$

$T_1 = \{C\} \subset T_2 = \{C, B\} \subset T_3 = \{C, B, S\} = T_4$

Es ist also A das einzige nichtterminierende Symbol.

Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken besteht darin, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = \emptyset$. Lemma 8.2 hat folgende interessante Konsequenz.

Satz 8.4

Das Leerheitsproblem ist für kontextfreie Grammatiken in polynomieller Zeit entscheidbar.

Beweis. Offenbar gilt $L(G) \neq \emptyset$ gdw. $\exists w \in \Sigma^* : S \vdash_G^* w$ gdw. S ist terminierend. Ausserdem ist leicht zu sehen, dass der Algorithmus zum Berechnen aller terminierenden Symbole in polynomieller Zeit läuft. □

Wir werden in “Theoretische Informatik 2” sehen, dass das Leerheitsproblem für Grammatiken der Typen 0 und 1 nicht entscheidbar ist.

Lemma 8.5

Für jede kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man die Menge der erreichbaren Nichtterminalsymbole berechnen.

Beweis. Wir definieren dazu

$$E_0 := \{S\}$$
$$E_{i+1} := E_i \cup \{A \mid \exists B \in E_i \text{ mit Regel } B \longrightarrow u_1 A u_2 \in P\}$$

Es gilt

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq N.$$

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $E_k = E_{k+1}$ und damit $E_k = \bigcup_{i \geq 0} E_i$.

Behauptung:
$E_k = \{A \in N \mid A \text{ ist erreichbar}\}$, denn:

„$\subseteq$“: Zeige durch Induktion über i: E_i enthält nur erreichbare Symbole

„$\supseteq$“: Zeige durch Induktion über i: $S \vdash_G^i uAv \Rightarrow A \in E_i$.

□

Beispiel 8.6

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S \longrightarrow aS, \quad && A \longrightarrow ASB, \\ & S \longrightarrow SB, && A \longrightarrow C, \\ & S \longrightarrow SS, && B \longrightarrow Cb, \\ & S \longrightarrow \varepsilon \quad \} \end{aligned}$$

$E_0 = \{S\} \subset E_1 = \{S, B\} \subset E_2 = \{S, B, C\} = E_3$

Es ist also A das einzige nichterreichbare Symbol.

Lemma 8.2 und 8.5 zusammen zeigen, wie man unerreichbare und nichtterminierende Symbole eliminieren kann.

Satz 8.7

Zu jeder kontextfreien Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ kann man eine äquivalente reduzierte kontextfreie Grammatik konstruieren.

Beweis. Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$.

Erster Schritt: Eliminieren nicht terminierender Symbole.

G' is die Einschränkung von G auf terminierende Nichtterminale, also
$G' := (N', \Sigma, P', S)$ mit

- $N' := \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend in } G\}$
- $P' := \{A \longrightarrow w \in P \mid A \in N', w \in (N' \cup \Sigma)^*\}$

Beachte: Weil $L(G) \neq 0$ ist S terminierend, also $S \in N'$!

Zweiter Schritt: Eliminieren unerreichbarer Symbole.

$G'' := (N'', \Sigma, P'', S)$ ist die Einschränkung von G' auf erreichbare Nichtterminale, wobei

- $N'' := \{A \in N' \mid A \text{ ist erreichbar in } G'\}$
- $P'' := \{A \longrightarrow w \in P' \mid A \in N'', w \in (N' \cup \Sigma)^*\}$

Man sieht leicht, dass $L(G) = L(G') = L(G'')$ und G'' reduziert ist. □

Vorsicht:
Die Reihenfolge der beiden Schritte ist wichtig, dann das Eliminieren nicht terminierender Symbole kann zusätzliche Symbole unerreichbar machen (aber nicht umgekehrt). Betrachte zum Beispiel die Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{S \longrightarrow \varepsilon, \quad S \longrightarrow AB, \quad A \longrightarrow a\}$$

In G sind alle Symbole erreichbar. Eliminiert man zuerst die unerreichbaren Symbole, so ändert sich die Grammatik also nicht. Das einzige nicht terminierende Symbol ist B und dessen Elimination liefert

$$P' = \{S \to \varepsilon, \quad A \longrightarrow a\}$$

Diese Grammatik ist nicht reduziert, da nun A unerreichbar ist.

Beachte auch, dass eine Grammatik G mit $L(G) = \emptyset$ niemals reduziert sein kann, da jede Grammatik ein Startsymbol S enthalten muss und S in G nicht terminierend sein kann.

Wie zeigen nun, dass jede reduzierte Grammatik in eine äquivalente Grammatik in *Chomsky-Normalform* gewandelt werden kann. Dies geschieht in drei Schritten:

- Eliminieren von Regeln der Form $A \longrightarrow \varepsilon$ (*ε-Regeln*),
- Eliminieren von Regeln der Form $A \longrightarrow B$ (*Kettenregeln*),
- Aufbrechen langer Wörter auf den rechten Seiten von Produktionen und Aufheben der Mischung von Terminalen und Nichtterminalen.

Am Ende werden wir die sogennante *Chomsky-Normalform* hergestellt haben, bei der alle Regeln die Form $A \longrightarrow BC$ und $A \longrightarrow a$ haben. Wie bei Typ-1-Grammatiken ist die Ausnahme $S \longrightarrow \varepsilon$ erlaubt, wenn ε nicht auf der rechten Seite von Produktionen vorkommt.

Wir beginnen mit dem Eliminieren von ε-Regeln.

Definition 8.8 (ε-freie kontextfreie Grammatik)
Eine kontextfreie Grammatik heißt *ε-frei*, falls gilt:

1) Sie enthält keine Regeln $A \longrightarrow \varepsilon$ für $A \neq S$.
2) Ist $S \longrightarrow \varepsilon$ enthalten, so kommt S nicht auf der rechten Seite einer Regel vor.

Um eine Grammatik ε-frei zu machen, eliminieren wir zunächst *alle* ε-Regeln. Wir erhalten eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Das Fehlen von ε kann man später leicht wieder ausgleichen.

Lemma 8.9

Es sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann lässt sich eine Grammatik G' ohne ε-Regeln konstruieren mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis.

1) Finde alle $A \in N$ mit $A \vdash_G^* \varepsilon$:

$$N_1 := \{A \in N \mid A \longrightarrow \varepsilon \in P\}$$
$$N_{i+1} := N_i \cup \{A \in N \mid A \longrightarrow B_1 \cdots B_n \in P \text{ mit } B_1, \ldots, B_n \in N_i\}$$

Es gibt ein k mit $N_k = N_{k+1} = \bigcup_{i \geq 1} N_i$. Für dieses k gilt: $A \in N_k$ gdw. $A \vdash_G^* \varepsilon$.

2) Eliminiere in G alle Regeln $A \longrightarrow \varepsilon$. Um dies auszugleichen, nimmt man für alle Regeln

$$A \longrightarrow u_1 B_1 \cdots u_n B_n u_{n+1} \text{ mit } B_1, \ldots, B_n \in N_k \text{ und } u_1, \ldots, u_{n+1} \in (\Sigma \cup N \setminus N_k)^*$$

die Regeln

$$A \longrightarrow u_1 \beta_1 u_2 \cdots u_n \beta_n u_{n+1}$$

hinzu für alle $\beta_1 \in \{B_1, \varepsilon\}, \ldots, \beta_n \in \{B_n, \varepsilon\}$ mit $u_1 \beta_1 u_2 \cdots u_n \beta_n u_{n+1} \neq \varepsilon$. □

Beispiel:

$$\begin{aligned}
P = \quad & \{S \longrightarrow aS,\ S \longrightarrow SS,\ S \longrightarrow bA,\\
& A \longrightarrow BB,\\
& B \longrightarrow CC,\ B \longrightarrow aAbC,\\
& C \longrightarrow \varepsilon\}\\
N_0 = \quad & \{C\},\\
N_1 = \quad & \{C, B\},\\
N_2 = \quad & \{C, B, A\} = N_3\\
P' = \quad & \{S \longrightarrow aS,\ S \longrightarrow SS,\ S \longrightarrow bA,\ S \longrightarrow b,\\
& A \longrightarrow BB,\ A \longrightarrow B,\\
& B \longrightarrow CC,\ B \longrightarrow C,\\
& B \longrightarrow aAbC,\ B \longrightarrow abC,\ B \longrightarrow aAb, B \longrightarrow ab\}
\end{aligned}$$

Die Ableitung $S \vdash bA \vdash bBB \vdash bCCB \vdash bCCCC \vdash^* b$ kann in G' direkt durch $S \vdash b$ erreicht werden.

Satz 8.10

Zu jeder kontextfreien Grammatik G kann eine äquivalente ε-freie Grammatik konstruiert werden.

Beweis. Konstruiere G' wie im Beweis von Lemma 8.9 beschrieben. Ist $\varepsilon \notin L(G)$ (d.h. $S \not\vdash_G^* \varepsilon$, also $S \notin N_k$), so ist G' die gesuchte ε-freie Grammatik. Sonst erweitere G' um ein neues Startsymbol S_0 und die Produktionen $S_0 \longrightarrow S$ und $S_0 \longrightarrow \varepsilon$. □

Korollar 8.11
$\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$.

Beweis. Offenbar ist jede ε-freie kontextfreie Grammatik eine Typ-1-Grammatik, da keine der verbleibenden Regeln verkürzend ist (mit Ausnahme von $S \longrightarrow \varepsilon$, wobei dann S ja aber wie auch bei Typ-1 gefordert auf keiner rechten Regelseite auftritt). □

Der folgende Satz zeigt, dass man auf Kettenregeln verzichten kann.

Satz 8.12
Zu jeder kontextfreien Grammatik kann man eine äquivalente kontextfreie Grammatik konstruieren, die keine Kettenregeln enthält.

Beweisskizze.

1) Bestimme die Relation $K := \{(A, B) \mid A \vdash_G^* B\}$
(leicht mit induktivem Verfahren machbar).
2) $P' = \{A \longrightarrow w \mid (A, B) \in K, B \longrightarrow w \in P, \text{ und } w \notin N\}$ □

Beispiel:

$$\begin{aligned} P &= \{S \longrightarrow A,\ A \longrightarrow B,\ B \longrightarrow aA,\ B \longrightarrow b\} \\ K &= \{(S,S),(A,A),(B,B),(S,A),(A,B),(S,B)\}, \\ P' &= \{B \longrightarrow aA,\ A \longrightarrow aA,\ S \longrightarrow aA, \\ &\qquad B \longrightarrow b,\quad A \longrightarrow b,\quad S \longrightarrow b\} \end{aligned}$$

Wir etablieren nun die Chomsky-Normalform.

Satz 8.13 (Chomsky-Normalform)
Jede kontextfreie Grammatik lässt sich umformen in eine äquivalente Grammatik, die nur Regeln der Form

- $A \longrightarrow a,\ A \longrightarrow BC$ *mit* $A, B, C \in N,\ a \in \Sigma$
- *und eventuell* $S \longrightarrow \varepsilon$*, wobei* S *nicht rechts vorkommt*

enthält. Eine derartige Grammatik heißt dann Grammatik in Chomsky-Normalform.

Beweis.

1) Konstruiere zu der gegebenen Grammatik eine äquivalente ε-freie ohne Kettenregeln. (Dabei ist die Reihenfolge wichtig!)
2) Führe für jedes $a \in \Sigma$ ein neues Nichtterminalsymbol X_a und die Produktion $X_a \longrightarrow a$ ein.

3) Ersetze in jeder Produktion $A \longrightarrow w$ mit $w \notin \Sigma$ alle Terminalsymbole a durch die zugehörigen X_a.

4) Produktionen $A \longrightarrow B_1 \cdots B_n$ für $n > 2$ werden ersetzt durch

$$A \longrightarrow B_1C_1,\ C_1 \longrightarrow B_2C_2,\ \ldots,\ C_{n-2} \longrightarrow B_{n-1}B_n$$

wobei die C_i jeweils neue Symbole sind.

□

Wir betrachten nun das *Wortproblem* für kontextfrei Sprachen. Im Gegensatz zu den regulären Sprachen fixieren wir dabei eine kontextfreie Sprache L, die durch eine Grammatik G gegeben ist, anstatt G als Eingabe zu betrachten. Die zu entscheidende Frage lautet dann: gegeben ein Wort $w \in \Sigma^*$, ist $w \in L$? Das fixieren der Sprache ist für kontextfreie Sprachen in den meisten Anwendungen durchaus sinnvoll: wenn man z.B. einen Parser für eine Programmiersprache erstellt, so tut man dies i.d.R. für eine einzelne, fixierte Sprache und betrachtet nur das in der Programmiersprache formulierte Programm (= Wort) als Eingabe, nicht aber die Grammatik für die Programmiersprache selbst.

Wir nehmen an, dass die verwendete Grammatik zuvor in Chomsky-Normalform transformiert wurde. Wie wir gleich sehen werden, ist dies eine Voraussetzung, um den bekannten CYK-Algorithmus anwenden zu können. Zuvor soll aber kurz eine angenehme Eigenschaft der Chomsky-Normalform erwähnt werden, die auf sehr einfache Weise einen (wenngleich ineffizienten) Algorithmus für das Wortproblem liefert: wenn G eine Grammatik in Chomsky-Normalform ist, dann hat jede Ableitung eines Wortes $w \in L(G)$ *höchstens die Länge* $2|w| + 1$:

- Produktionen der Form $A \longrightarrow BC$ verlängern um 1, d.h. sie können maximal $|w| - 1$-mal angewandt werden.
- Produktionen der Form $A \longrightarrow a$ erzeugen genau ein Terminalsymbol von w, d.h. sie werden genau $|w|$-mal angewandt.

Die "+1" wird nur wegen des leeren Wortes benötigt, das Länge 0 hat, aber einen Ableitungsschritt benötigt. Im Gegensatz dazu kann man zu kontexfreien Grammatiken, die *nicht* in Chomsky-Normalform sind, *überhaupt keine* Schranke für die maximale Länge von Ableitungen angeben. Im wesentlichen liegt dies daran, dass Kettenregeln und ε-Regeln gestattet sind.

Für Grammatiken in Chomsky-Normalform liefert die obige Beobachtung folgenden Algorithmus für das Wortproblem: gegeben ein Wort w kann man rekursive *alle möglichen Ableitungen* der Länge $\leq 2|w| + 1$ durchprobieren, denn davon gibt es nur endlich viele. Wie schon erwähnt ist dieses Verfahren aber exponentiell. Einen besseren Ansatz liefert die folgende Überlegung:

Definition 8.14

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform und $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$. Wir definieren:

- $w_{ij} := a_i \cdots a_j \quad$ (für $i \leq j$)
- $N_{ij} := \{A \in N \mid A \vdash_G^* w_{ij}\}$

Mit dieser Notation gilt nun:

1)	$S \in N_{1n}$	gdw.	$w \in L(G)$
2)	$A \in N_{ii}$	gdw.	$A \vdash_G^* a_i$
		gdw.	$A \longrightarrow a_i \in P$
3)	$A \in N_{ij}$ für $i < j$	gdw.	$A \vdash_G^* a_i \cdots a_j$
		gdw.	$\exists A \longrightarrow BC \in P$ und ein k mit $i \leq k < j$ mit
			$B \vdash_G^* a_i \cdots a_k$ und $C \vdash_G^* a_{k+1} \cdots a_j$
		gdw.	$\exists A \longrightarrow BC \in P$ und k mit $i \leq k < j$ mit
			$B \in N_{ik}$ und $C \in N_{(k+1)j}$

Diese Überlegungen liefern einen Algorithmus zur Berechnung von N_{1n} nach der sogenannten "Divide & Conquer" ("Teile und Herrsche") Methode. Die generelle Idee dabei ist, das eigentliche Problem in Teilprobleme zu uerlegen und diese dann beginnend mit den einfachsten und fortschreitend zu immer komplexeren Teilproblemen zu lösen. Im vorliegenden Fall sind die Teilprobleme das Berechnen der N_{ij} mit $i \leq j$. Die "einfachsten" Teilprobleme sind dann diejenigen mit $i = j$ und die Teilprobleme werden immer schwieriger, je größer die Teilwortlänge $j - i$ wird.

Algorithmus 8.15 (CYK-Algorithmus von Cocke, Younger, Kasami)

For $i := 1$ **to** n **Do**
  $N_{ii} := \{A \mid A \longrightarrow a_i \in P\}$
For $\ell := 1$ **to** $n-1$ **Do** (wachsende Teilwortlänge $\ell = j - i$)
  For $i := 1$ **to** $n - \ell$ **Do** (Startposition i von Teilwort)
    $j := i + \ell$ (Endposition j von Teilwort)
    $N_{ij} := \emptyset$
    For $k := i$ **To** $j - 1$ **Do** (Mögliche Trennpositionen k)
      $N_{ij} := N_{ij} \cup \{A \mid \exists A \longrightarrow BC \in P$ mit $B \in N_{ik}$ und $C \in N_{(k+1)j}\}$

Beachte:

In der innersten Schleife sind N_{ik} und $N_{(k+1)j}$ bereits berechnet, da die Teilwortlängen $k - i$ und $j - k + 1$ kleiner als das aktuelle ℓ.

Satz 8.16

Für jede Grammatik G in Chomsky-Normalform entscheidet der CYK-Algorithmus die Frage „gegeben w, ist $w \in L(G)$?" in Zeit $O(|w|^3)$.

Beweis. Drei geschachtelte Schleifen, die jeweils $\leq |w| = n$ Schritte machen, daraus folgt: $|w|^3$ Schritte in der innersten Schleife. □

Beachte:
Die Größe von G ist hier als konstant angenommen (fest vorgegebenes G). Daher braucht die Suche nach den Produktionen $A \longrightarrow BC$ und $A \longrightarrow a_i$ auch nur konstante Zeit.

Beispiel:
$P = \{S \longrightarrow SA,\ S \longrightarrow a,$
$A \longrightarrow BS,$
$B \longrightarrow BB,\ B \longrightarrow BS,\ B \longrightarrow b,\ B \longrightarrow c\}$

und $w = abacba$:

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	S	$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$	S
2		B	A, B	B	B	A, B
3			S	$\emptyset$	$\emptyset$	S
4				B	B	A, B
5					B	A, B
6						S
$w =$	a	b	a	c	b	a

$S \in N_{1,6} = \{S\}$
$\Rightarrow w \in L(G)$

Wir werden in der VL „Theoretische Informatik II“ beweisen, dass das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen unentscheidbar ist, siehe Satz 17.7 dieses Skriptes. Es gibt also keinen Algorithmus, der für zwei gegebene kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 entscheidet, ob $L(G_1) = L(G_2)$.

Eine weitere interessante Normalform für kontextfreie Grammatiken ist die *Greibach-Normalform*, bei der es für jedes Wort in der Sprache eine Ableitung gibt, die die Terminale *streng von links nach rechts* erzeugt, und zwar *genau ein* Nichtterminal pro Ableitungsschritt. Wir geben den folgenden Satz ohne Beweis an.

Satz 8.17 (Greibach-Normalform)
Jede kontextfreie Grammatik lässt sich umformen in eine äquivalente Grammatik, die nur Regeln der Form

- $A \longrightarrow aw \quad (A \in N, a \in \Sigma, w \in N^*)$
- *und eventuell* $S \longrightarrow \varepsilon$*, wobei* S *nicht rechts vorkommt*

enthält.
Eine derartige Grammatik heißt Grammatik in Greibach-Normalform.

9. Abschlusseigenschaften und Pumping Lemma

Die kontextfreien Sprachen verhalten sich bezüglich Abschlusseigenschaften nicht ganz so gut wie die regulären Sprachen. Wir beginnen mit positiven Resultaten.

Satz 9.1
Die Klasse $\mathcal{L}_2$ der kontextfreien Sprachen ist unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen.

Beweis. Es seien $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ die Sprachen für kontextfreie Grammatiken $G_i = (N_i, \Sigma, P_i, S_i) \quad (i = 1, 2)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

1) $G := (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \longrightarrow S_1, S \longrightarrow S_2\}, S)$ mit $S \notin N_1 \cup N_2$ ist eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L_1 \cup L_2$.
2) $G' := (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \longrightarrow S_1S_2\}, S)$ mit $S \notin N_1 \cup N_2$ ist eine kontextfreie Grammatik mit $L(G') = L_1 \cdot L_2$.
3) $G'' := (N_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow SS_1\}, S)$ mit $S \notin N_1$ ist eine kontextfreie Grammatik für L_1^* □

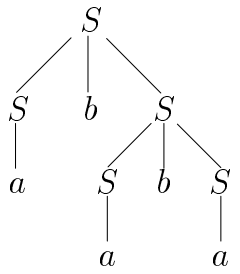
Wir werden zeigen, dass Abschluss unter *Schnitt* und *Komplement nicht* gilt. Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Methode, von einer Sprache nachzuweisen, dass sie *nicht* kontextfrei ist. Dies gelingt wieder mit Hilfe eines Pumping-Lemmas. in dessen Beweis stellt man Ableitungen als Bäume dar, sogenannte *Ableitungsbäume*.

Beispiel:
$P = \{S \longrightarrow SbS, S \longrightarrow a\}$
Drei *Ableitungen* des Wortes *ababa*:

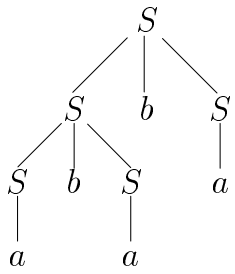
1) $S \vdash SbS \vdash abS \vdash abSbS \vdash ababS \vdash ababa$
2) $S \vdash SbS \vdash abS \vdash abSbS \vdash abSba \vdash ababa$
3) $S \vdash SbS \vdash Sba \vdash SbSba \vdash Sbaba \vdash ababa$

Die zugehörigen *Ableitungsbäume*:

Für 1) und 2):



Für 3):



Ein Ableitungsbaum kann also für mehr als eine Ableitung stehen und dasselbe Wort kann verschiedene Ableitungsbäume haben.

Wir verzichten auf eine exakte Definition von Ableitungsbäumen, da diese eher kompliziert als hilfreich ist. Stattdessen geben wir nur einige zentrale Eigenschaften an.

Allgemein:
Die Knoten des Ableitungsbaumes sind mit Elementen aus $\Sigma \cup N$ beschriftet. Dabei dürfen Terminalsymbole nur an den Blättern vorkommen (also an den Knoten ohne Nachfolger) und Nichtterminale überall (um auch partielle Ableitungen darstellen zu können). Ein mit A beschrifteter Knoten kann mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beschriftete Nachfolgerknoten haben, wenn $A \longrightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_n \in P$ ist.

Ein Ableitungsbaum, dessen Wurzel mit A beschriftet ist und dessen Blätter (von links nach rechts) mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Sigma \cup N$ beschriftet sind, beschreibt eine Ableitung $A \vdash_G^* \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Lemma 9.2 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)
Für jede kontextfreie Sprache L gibt es ein $n_0 \geq 0$ so dass gilt:
für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n_0$ existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit:

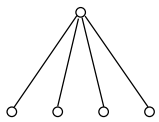
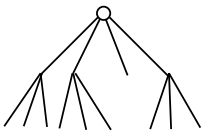
- $vx \neq \varepsilon$ *und* $|vwx| \leq n_0$
- $uv^iwx^iy \in L$ *für alle* $i \geq 0$.

Beweis. Sei G eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L$. Nach Satz 8.10 und 8.12 können wir o.B.d.A. annehmen, dass G ε-frei ist und keine Kettenregeln enthält. Sei

- m die Anzahl der Nichtterminale in G;
- k eine Schranke auf die Länge der rechten Regelseiten in G;
- $n_0 = k^{m+1}$.

Wir verfahren nun wir folgt.

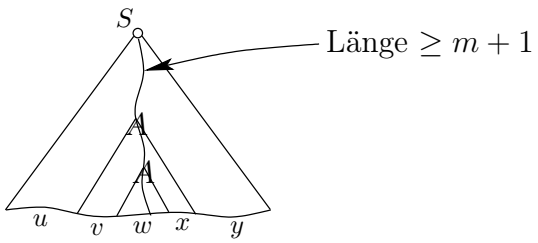
1) Ein Baum der Tiefe $\leq t$ und der Verzweigungszahl $\leq k$ hat maximal k^t viele Blätter:

eine Ebene: $\leq k$ Blätter	zwei Ebenen: $\leq k^2$ Blätter
	

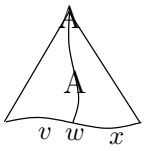
   etc.

   Der Ableitungsbaum für z hat $|z| \geq k^{m+1}$ Blätter, also gibt es einen Pfad (Weg von Wurzel zu Blatt) der Länge $\geq m + 1$ (gemessen in Anzahl Kanten).

2) Auf diesem Pfad kommen $> m+1$ Symbole vor, davon $> m$ Nichtterminale. Da es nur m verschiedene Nichtterminale gibt, kommt ein Nichtterminal A zweimal vor. Dies führt zu folgender Wahl von u, v, w, x, y:



Wir wählen hier o.B.d.A. die erste Wiederholung eines Nichtterminals A von den Blättern aus gesehen; mit den Argumenten in 1) hat dann der Teilbaum



die Tiefe $\leq m+1$, was $|vwx| \leq k^{m+1} = n_0$ zeigt.

3) Es gilt: $S \vdash_G^* uAy, \quad A \vdash_G^* vAx, \quad A \vdash_G^* w$, woraus folgt:

$$S \ \vdash_G^* \ uAy \ \vdash_G^* \ uv^iAx^iy \ \vdash_G^* \ uv^iwx^iy.$$

4) $vx \neq \varepsilon$: Da G ε-frei ist, wäre sonst $A \vdash_G^* vAx$ nur bei Anwesenheit von Regeln der Form $A \longrightarrow B$ möglich. □

Wir verwenden nun das Pumpinglemma, um beispielhaft von einer Sprache nachzuweisen, dass sie nicht kontextfrei ist.

Lemma 9.3
$L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$.

Beweis. Angenommen, $L \in \mathcal{L}_2$. Dann gibt es eine ε-freie kontextfreie Grammatik G ohne Regeln der Form $A \longrightarrow B$ für L. Es sei n_0 die zugehörige Zahl aus Lemma 9.2. Wir betrachten $z = a^{n_0}b^{n_0}c^{n_0} \in L = L(G)$. Mit Satz 9.2 gibt es eine Zerlegung

$$z = uvwxy, \ vx \neq \varepsilon \text{ und } uv^iwx^iy \in L \text{ für alle } i \geq 0.$$

1. Fall: v enthält verschiedene Symbole. Man sieht leicht, dass dann

$$uv^2wx^2y \notin a^*b^*c^* \supseteq L.$$

2. Fall: x enthält verschiedene Symbole. Dies führt zu entsprechendem Widerspruch.

3. Fall: v enthält lauter gleiche Symbole und x enthält lauter gleiche Symbole. Dann gibt es einen Symbole aus $\{a, b, c\}$, der in xv nicht vorkommt. Daher kommt dieser in $uv^0wx^0y = uwy$ weiterhin n_0-mal vor. Aber es gilt $|uwy| < 3n_0$, was $uwy \notin L$ zeigt.

□

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die kontextfreien Sprachen eine *echte* Teilmenge der kontextsensitiven Sprachen sind.

Satz 9.4
$\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ gilt (Korollar 8.11). Es bleibt zu zeigen, dass die Inklusion echt ist. Dafür betrachten wir die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. Nach Lemma 9.3 ist $L \notin \mathcal{L}_2$. Nach Beispiel 6.3 gilt aber $L \in \mathcal{L}_1$. □

Ausserdem können wir nun zeigen, dass die kontextfreien Sprachen unter zwei wichtigen Operationen nicht abgeschlossen sind.

Korollar 9.5
Die Klasse $\mathcal{L}_2$ der kontextfreien Sprachen ist nicht *unter Schnitt und Komplement abgeschlossen.*

Beweis.

1) Die Sprachen $\{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ und $\{a^m b^n c^n \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ sind in $\mathcal{L}_2$:
   - $\{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 1\} = \underbrace{\underbrace{\{a^n b^n \mid n \geq 1\}}_{\in \mathcal{L}_2} \cdot \underbrace{\{c^m \mid m \geq 1\}}_{= c^+ \in \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2}}_{\in \mathcal{L}_2 \text{ (Konkatenation)}}$
   - $\{a^m b^n c^n \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ — analog
2) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\} \cap \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$.
   Wäre $\mathcal{L}_2$ unter $\cap$ abgeschlossen, so würde $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{L}_2$ folgen.
   Widerspruch zu Teil 1) des Beweises von Satz 9.4.
3) $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
   Wäre $\mathcal{L}_2$ unter Komplement abgeschlossen, so auch unter $\cap$, da $\mathcal{L}_2$ unter $\cup$ abgeschlossen ist. Widerspruch zu 2).

□

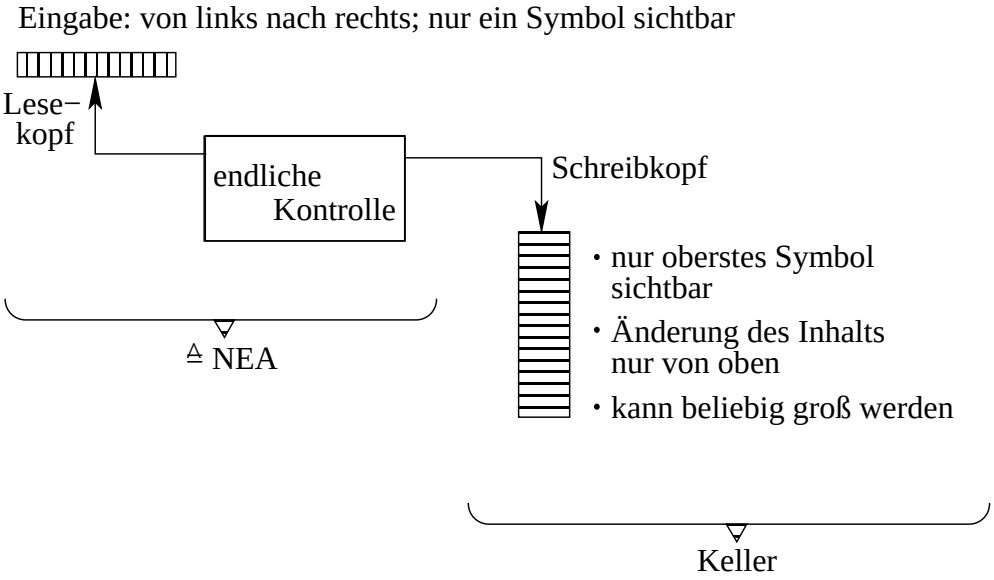
Beachte:
Man kann daher das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen nicht einfach auf das Leerheitsproblem reduzieren (dazu braucht man sowohl Schnitt als auch Komplement). Wie bereits erwähnt werden wir später sogar sehen, dass das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen *unentscheidbar* ist.

10. Kellerautomaten

Bisher hatten wir kontextfreie Sprachen nur mit Hilfe von Grammatiken charakterisiert. Wir haben gesehen, dass endliche Automaten *nicht* in der Lage sind, alle kontextfreien Sprachen zu akzeptieren.

Um die *Beschreibung von kontextfreien Sprachen* mit Hilfe von endlichen Automaten zu ermöglichen, muss man diese um eine unbeschränkte *Speicherkomponente*, einen sogenannten *Keller (engl. Stack)*, erweitern. Dieser Keller speichert zwar zu jedem Zeitpunkt nur endlich viel Information, kann aber unbeschränkt wachsen.

Die folgende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung eines *Kellerautomaten*:



Diese Idee wird in folgender Weise formalisiert.

Definition 10.1 (Kellerautomat)
Ein *Kellerautomat (pushdown automaton, kurz PDA)* hat die Form
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$, wobei

- Q eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
- Σ das *Eingabealphabet* ist,
- Γ das *Kelleralphabet* ist,
- $q_0 \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $Z_0 \in \Gamma$ das *Kellerstartsymbol* ist und
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Q$ eine endliche *Übergangsrelation* ist.

Anschaulich bedeutet die Übergangsrelation:

(q, a, Z, γ, q'): Im Zustand q mit aktuellem Eingabesymbol a und oberstem Kellersymbol Z darf der Automat Z durch γ ersetzen und in den Zustand q' und zum nächsten Eingabesymbol übergehen.

$(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$: wie oben, nur dass das aktuelle Eingabesymbol nicht relevant ist und man nicht zum nächsten Eingabesymbol übergeht (der Lesekopf ändert seine Position nicht).

Im Gegensatz zu den ε-Übergängen von ε-NEAs können bei PDAs Zustände der zweiten Form im allgemeinen nicht eliminiert werden (z.B. kann ohne solche Übergänge das leere Wort nicht eliminert werden). Man beachte, dass ein Kellerautomat nicht über Endzustände verfügt. Wie wir im folgenden sehen werden ist Akzeptanz stattdessen über den *leeren Keller* definiert.

Um die Sprache zu definieren, die von einem Kellerautomaten erkannt wird, brauchen wir den Begriff der *Konfiguration*, die den aktuellen Stand einer Kellerautomatenberechnet erfasst. Diese ist bestimmt durch.

- den *noch zu lesenden Rest* $w \in \Sigma^*$ der Eingabe (Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w)
- den *Zustand* $q \in Q$
- den *Kellerinhalt* $\gamma \in \Gamma^*$ (Schreiblesekopf steht auf dem ersten Symbol von γ)

Definition 10.2
Eine *Konfiguration* von $\mathcal{A}$ hat die Form

$$\mathcal{K} = (q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

Die Übergangsrelation ermöglicht die folgenden *Konfigurationsübergänge*:

- $(q, aw, Z\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (q', w, \beta\gamma)$ falls $(q, a, Z, \beta, q') \in \Delta$
- $(q, w, Z\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (q', w, \beta\gamma)$ falls $(q, \varepsilon, Z, \beta, q') \in \Delta$
- $\mathcal{K} \vdash_{\mathcal{A}}^* \mathcal{K}'$ gdw. $\exists n \geq 0\ \exists \mathcal{K}_0, \ldots, \mathcal{K}_n$ mit

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K},\ \mathcal{K}_n = \mathcal{K}' \text{ und } \mathcal{K}_i \vdash_{\mathcal{A}} \mathcal{K}_{i+1} \text{ für } 0 \leq i < n.$$

Der Automat $\mathcal{A}$ *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$ gdw.

$$(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad \text{(Eingabewort ganz gelesen und Keller leer).}$$

Die von $\mathcal{A}$ *erkannte Sprache* ist

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$

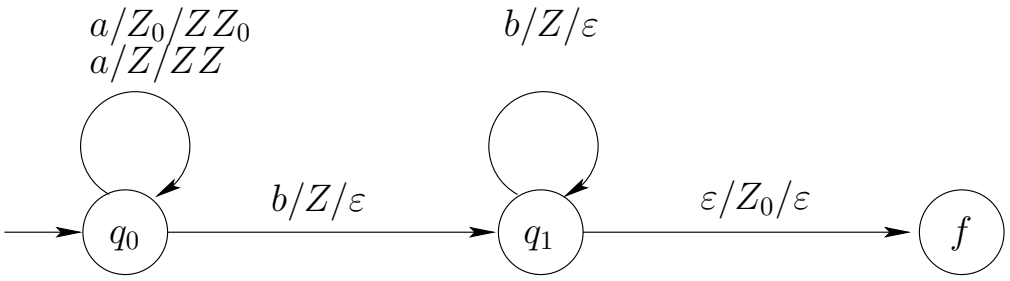
Im folgenden zwei einfach Beispiele für Kellerautomaten.

Beispiel 10.3

Ein PDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

- $Q = \{q_0, q_1, f\}$,
- $\Gamma = \{Z, Z_0\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$ und
- $\Delta = \{(q_0, a, Z_0, ZZ_0, q_0)$, (erstes a, speichere Z)
  (q_0, a, Z, ZZ, q_0), (weitere a's, speichere Z)
  $(q_0, b, Z, \varepsilon, q_1)$, (erstes b, entnimm Z)
  $(q_1, b, Z, \varepsilon, q_1)$, (weitere b's, entnimm Z)
  $(q_1, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, f)\}$ (lösche das Kellerstartsymbol)

Wir stellen einen Kellerautomaten graphisch in der folgenden Weise dar, wobei die Kantenbeschriftung $a/Z/\gamma$ bedeutet, dass der Automat bei Z als oberstem Kellersymbol das Eingabesymbol a lesen kann und Z durch γ ersetzen.



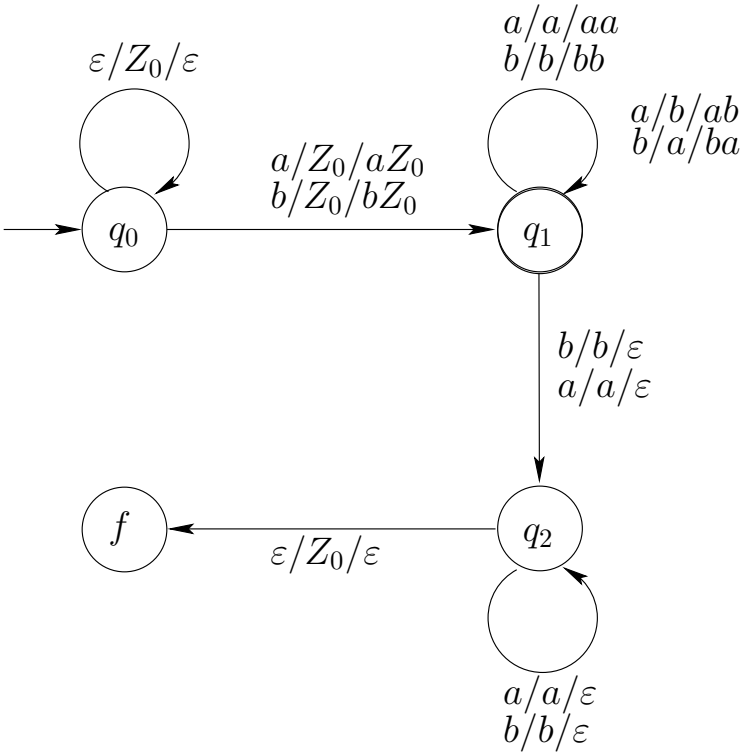
Betrachten wir beispielhaft einige Konfigurationsübergänge:

1) $(q_0, aabb, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, abb, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, bb, ZZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \varepsilon)$
   – akzeptiert
2) $(q_0, aab, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q_0, b, ZZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, ZZ_0)$
   – kein Übergang mehr möglich, nicht akzeptiert
3) $(q_0, abb, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, bb, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (f, b, \varepsilon)$
   – nicht akzeptiert

Beispiel 10.4

Ein PDA für $L = \{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ (wobei für $w = a_1 \dots a_n$ gilt $\overleftarrow{w} = a_n \dots a_1$).

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, f\}$,
- $\Gamma = \{a, b, Z_0\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$, und
- $\Delta =$



In q_1 wird die erste Worthälfte im Keller gespeichert. Der nichtdeterministische Übergang von q_1 nach q_2 „rät“ die Wortmitte. In q_2 wird die zweite Hälfte des Wortes gelesen und mit dem Keller verglichen.

Die in den Definitionen 10.1 und 10.2 eingeführte Version von Kellerautomaten akzeptiert *per leerem Keller*. Man kann stattdessen auch Akzeptanz *per Endzustand* definieren.

Definition 10.5

Ein *Kellerautomat (PDA) mit Endzuständen* ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F),$$

wobei alle Komponenten bis auf F wie in Definition 10.1 sind und $F \subseteq Q$ eine *Endzustandsmenge* ist. Ein solcher PDA *akzeptiert* ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ gdw. $(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \gamma)$ für ein $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

Es ist nicht schwer, zu zeigen, dass PDAs mit Akzeptanz per leerem Keller und solche mit Akzeptanz per Endzustand dieselbe Sprachklasse definieren. Der Beweis wird als Übung gelassen.

Satz 10.6

Jede Sprache, die von einem PDA (per leerem Keller) erkannt wird, wird auch von einem PDA mit Endzuständen erkannt und umgekehrt.

Wir werden nun zeigen, dass man mit Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen erkennen kann. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Linksableitung ein.

Definition 10.7
Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Ableitung $S = w_0 \vdash_G w_1 \vdash_G w_2 \vdash_G \cdots \vdash_G w_n$ heisst *Linksableitung* wenn sich w_{i+1} aus w_i durch Anwendung einer Regel auf das linkeststehende Nichtterminal in w_i ergibt, für alle $i < n$.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich die von einer kontextfreien Grammatik erzeugte Sprache nicht verändert, wenn man statt beliebigen Ableitungen nur noch Linksableitungen zuläßt.

Lemma 10.8
Für jede kontextfreie Grammatik G gilt: $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ kann in G mit Linksableitung erzeugt werden.

Zum Beweis von Lemma 10.8 genügt es, zu zeigen, dass jedes $w \in L(G)$ mittels einer Linksableitung erzeugt werden kann. Wir argumentieren nur informell: wenn $w \in L(G)$, dann gibt es eine Ableitung von w in G. Diese kann als Ableitungsbaum dargestellt werden. Aus dem Ableitungsbaum lässt sich nun wiederrum eine Linksableitung von w ablesen (zum Beispiel durch Traversieren des Baumes in Pre-Order).

Satz 10.9
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1) L with von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.

2) L wird von einem PDA erkannt.

Beweis.

„$1 \longrightarrow 2$“.

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Der zugehörige PDA simuliert Linksableitungen von G auf dem Keller.

Genauer gesagt definieren wir $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$ wobei $Q = \{q\}$, $\Gamma = \Sigma \cup N$, $q_0 = q$, $Z_0 = S$ und Δ aus folgenden Übergängen besteht:

- Übergänge zum Anwenden von Produktionen auf das oberste Kellersymbol:

  für jede Regel $A \to \gamma$ den Übergang $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$;

- Übergänge zum Entfernen bereits erzeugter Terminalsymbole von der Kellerspitze, wenn sie in der Eingabe vorhanden sind:

  für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ den Übergang $(q, a, a, \varepsilon, q)$.

Beispiel:
$P = \{S \longrightarrow \varepsilon,\ S \longrightarrow aSa,\ S \longrightarrow bSb\}$ liefert die Übergänge:

$$
\begin{array}{llllll}
(q, & \varepsilon, & S, & \varepsilon, & q), & (S \longrightarrow \varepsilon) \\
(q, & \varepsilon, & S, & aSa, & q), & (S \longrightarrow aSa) \\
(q, & \varepsilon, & S, & bSb, & q), & (S \longrightarrow bSb) \\
(q, & a, & a, & \varepsilon, & q), & (a \text{ entfernen}) \\
(q, & b, & b, & \varepsilon, & q) & (b \text{ entfernen})
\end{array}
$$

Die Ableitung $S \vdash_G aSa \vdash_G abSba \vdash_G abba$ entspricht der *Konfigurationsfolge*

$$
\begin{array}{llll}
(q, abba, S) \vdash_{\mathcal{A}} (q, abba, aSa) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, bba, Sa) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, bba, bSba) \vdash_{\mathcal{A}} \\
(q, ba, Sba) \vdash_{\mathcal{A}} (q, ba, ba) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, a, a) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)
\end{array}
$$

Zu zeigen:

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S \vdash_G^* w$ mittels Linksableitung gdw $(q, w, S) \vdash_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Beweis der Behauptung.

„⇒“: Sei

$$S = w_0 \vdash_G w_1 \vdash_G \cdots \vdash_G w_n = w$$

eine Linksableitung. Für alle $i \leq n$ sei $w_i = u_i\alpha_i$ so dass u_i nur aus Terminalsymbolen besteht und α_0 mit Nichtterminal beginnt oder leer ist. Jedes u_i ist Präfix von w. Sei v_i das dazugehörende Suffix, also $w = u_iv_i$.

Wir zeigen, dass

$$(q, w, S) = (q, v_0, \alpha_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_1, \alpha_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* \cdots \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_n, \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Sei $i < n$ und $A \to \gamma$ die Produktion für $w_i \vdash_G w_{i+1}$. Also beginnt α_i mit A. Dann ergibt sich $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ durch folgende Transitionen:

- zunächst verwende $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$;
- verwende dann Transitionen $(q, a, a, \varepsilon, q)$ solange das oberste Stacksymbol ein Terminalsymbol a ist.

„⇐“: Gelte umgekehrt

$$(q, w, S) = (q, v_0, \alpha_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_1, \alpha_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* \cdots \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_n, \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass

- jede der Teilableitungen $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ genau einen Übergang der Form $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$ und beliebig viele der Form $(q, a, a, \varepsilon, q)$ verwendet und
- das erste Symbol von α_i ein Nichtterminal ist.

Jedes v_i ist Suffix von w. Sei u_i das dazugehörende Präfix, also $w = u_iv_i$.

Wir zeigen, dass

$$S = u_0\alpha_0 \vdash_G u_1\alpha_1 \vdash_G \cdots \vdash_G u_n\alpha_n.$$

Sei $i < n$ und $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$ der erste Übergang in $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_G^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ gefolgt von $(q, a_1, a_1, \varepsilon, q), \ldots, (q, a_m, a_m, \varepsilon, q)$. Dann hat α_i die Form $A\alpha_i'$ und γ die Form $a_1 \cdots a_m B\gamma'$ mit $B \in N$. Anwendung der Regel $A \to \gamma$ auf $u_i\alpha_i$ ergibt $u_i\gamma\alpha_i' = u_ia_1 \cdots a_m B\gamma'\alpha_i' = u_{i+1}\alpha_{i+1}$.

„$2 \longrightarrow 1$“.

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$ ein PDA. Die Nichtterminalsymbole der zugehörigen Grammatik G sind alle Tripel $[p, Z, q] \in Q \times \Gamma \times Q$.

Idee:

Es soll gelten: $[p, Z, q] \vdash_G^* u \in \Sigma^*$ gdw.

1. $\mathcal{A}$ erreicht *vom Zustand p aus den Zustand q* (in beliebig vielen Schritten)
2. durch *Lesen von u* auf dem Eingabeband und
3. *Löschen von Z* aus dem Keller (ohne dabei die Symbole unter Z anzutasten).

Die Produktionen beschreiben die intendierte Bedeutung jedes Nichtterminals $[p, Z, q]$ auf folgende Weise: um q von p aus unter Lesen der Eingabe $u = av$ und Löschen des Stacksymbols Z zu erreichen, braucht man eine Transition $(p, a, Z, X_1 \cdots X_n)$, die Z durch Symbole $X_1 \cdots X_n$ ersetzt und das erste Symbol a von u liest (hier ist auch "$a = \varepsilon$" möglich). Nun muss man noch den neu erzeugten Stackinhalt $X_1 \cdots X_n$ loswerden. Das tut man Schritt für Schritt mittels Zerlegung des Restwortes $v = v_1 \cdots v_n$ und über Zwischenzustände $p_1, \ldots, p_{n-1}$ so dass

- $[p_0, X_1, p_1]$ unter Lesen von v_1;
- $[p_1, X_2, p_2]$ unter Lesen von v_2;
- $\cdots$
- $[p_{n-1}, X_n, q]$ unter Lesen von v_n.

(Hier ist $[p, X, q]$ jeweils gemäss den obigen Punkten 1-3 zu lesen).

Da die benötigten Zwischenzustände $p_1, \ldots, p_{n-1}$ nicht bekannt sind, fügt man einfach eine Produktion

$$[p, Z, q] \longrightarrow a[p_0, X_1, p_1] \cdots [p_{n-1}, X_n, q]$$

für *alle möglichen* Zustandsfolgen $p_1, \ldots, p_{n-1}$ hinzu. In einer Ableitung der resultierenden Grammatik kann man dann die Regel mit den "richtigen" Zwischenzuständen auswählen (und eine falsche Auswahl führt einfach zu keiner Ableitung).

Formale Definition:

$$\begin{aligned}
G &:= (N, \Sigma, P, S) \text{ mit} \\
N &:= \{S\} \cup \{[p, Z, q] \mid p, q \in Q, Z \in \Gamma\} \\
P &:= \{S \longrightarrow [q_0, Z_0, q] \mid q \in Q\} \cup \\
&\quad \{[p, Z, q] \longrightarrow a \mid (p, a, Z, \varepsilon, q) \in \Delta \text{ mit } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\ \} \cup \\
&\quad \{[p, Z, q] \longrightarrow a[p_0, X_1, p_1][p_1, X_2, p_2] \ldots [p_{n-1}, X_n, q] \mid \\
&\qquad (p, a, Z, X_1 \ldots X_n, p_0) \in \Delta \text{ und} \\
&\qquad a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \\
&\qquad p_1, \ldots, p_{n-1} \in Q, \\
&\qquad n \geq 1\}
\end{aligned}$$

Beachte:
Für $n = 0$ hat man den Übergang $(p, a, Z, \varepsilon, q) \in \Delta$, welcher der Produktion $[p, Z, q] \longrightarrow a$ entspricht.

Behauptung:
Für alle $p, q \in Q, u \in \Sigma^*, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*$ gilt:

$$(\star) \qquad [p, Z, q] \vdash_G^* u \;\; \underline{\text{gdw}}. \;\; (p, u, Z) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Für $p = p_0$ und $Z = Z_0$ folgt daraus:

$$\vdash_G [q_0, Z_0, q] \vdash_G^* u \;\; \underline{\text{gdw}}. \;\; S(q_0, u, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

d.h. $u \in L(G) \;\; \underline{\text{gdw}}. \;\; u \in L(\mathcal{A})$.

Der Beweis dieser Behauptung kann durch Induktion über die Länge der Konfigurationsfolge („$\Rightarrow$“) bzw. über die Länge der Ableitung („$\Leftarrow$“) geführt werden. □

Beispiel:
Gegeben sei der PDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus Beispiel 10.3. Die Berechnung des PDA

$$(q_0, ab, Z_0) \overset{(q_0,a,Z_0,ZZ_0,q_0)}{\vdash_{\mathcal{A}}} (q_0, b, ZZ_0) \overset{(q_0,b,Z,\varepsilon,q_1)}{\vdash_{\mathcal{A}}} (q_1, \varepsilon, Z_0) \overset{(q_1,\varepsilon,Z_0,\varepsilon,f)}{\vdash_{\mathcal{A}}} (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

entspricht der Ableitung

$$S \vdash_G [q_0, Z_0, f] \vdash_G a[q_0, Z, q_1][q_1, Z_0, f] \vdash_G ab[q_1, Z_0, f] \vdash_G ab.$$

Aus Satz 10.9 ergibt sich leicht folgendes Korollar. Wir nennen zwei PDAs $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ *äquivalent* wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

Korollar 10.10
Zu jedem PDA $\mathcal{A}$ gibt es einen PDA $\mathcal{A}'$ so dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ und $\mathcal{A}'$ nur einen Zustand hat.

Beweis. Gegeben einen PDA $\mathcal{A}$ kann man erst die Konstruktion aus dem Teil „$2 \longrightarrow 1$“ des Beweises von Satz 10.9 anwenden und dann die aus dem Teil „$1 \longrightarrow 2$“. Man erhält einen äquivalenten PDA der nach Konstruktion nur einen einzigen Zustand enthält. □

Wegen der gerade gezeigten Äquivalenz zwischen kontextfreien Sprachen und PDA-akzeptierbaren Sprachen kann man Eigenschaften von kontextfreien Sprachen mit Hilfe von Eigenschaften von Kellerautomaten zeigen. Als Beispiel betrachten wir den Durchschnitt von kontextfreien Sprachen mit regulären Sprachen. Wir wissen: Der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen muss nicht kontextfrei sein. Dahingegen gilt:

Satz 10.11
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann ist $L \cap R$ kontextfrei.

Beweis. Es sei $L = L(\mathcal{A})$ für einen PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$ (o.B.d.A. mit Endzuständen) und $R = L(\mathcal{A}')$ für einen DEA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q_0', \delta', F')$. Wir wenden eine Produktkonstruktion an, um einen PDA zu konstruieren, der $L \cap R$ erkennt:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &:= (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, (q_0, q_0'), Z_0, \Delta', F \times F') \text{ mit}\\ \Delta' &:= \{((p,p'), a, Z, \gamma, (q,q')) \mid (p, a, Z, \gamma, q) \in \Delta \text{ und } \delta(p', a) = q'\} \cup\\ &\quad\ \{((p,p'), \varepsilon, Z, \gamma, (q,p')) \mid (p, \varepsilon, Z, \gamma, q) \in \Delta\}\end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht (durch Induktion über k):
$((p,p'), uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{B}}^{k} ((q,q'), v, \beta)$ gdw. $(p, uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{A}}^{k} (q, v, \beta)$ und $p' \xrightarrow{u}_{\mathcal{A}'} q'$ □

Beachte: mit zwei PDAs als Eingabe funktioniert eine solche Produktkonstruktion nicht, da die beiden PDAs den Keller im allgemeinen nicht „synchron“ nutzen (der eine kann das obere Kellersymbol löschen, während der andere Symbole zum Keller hinzufügt).

Deterministische Kellerautomaten

Analog zu endlichen Automaten kann man auch bei Kellerautomaten eine deterministische Variante betrachten. Intuitiv ist der Kellerautomat aus Beispiel 10.3 deterministisch, da es zu jeder Konfiguration höchstens eine Folgekonfiguration gibt. Der Kellerautomat aus Beispiel 10.4 ist hingegen nicht-deterministisch, da er die Wortmitte „rät“. Interessanterweise stellt es sich heraus, dass bei im Gegensatz zu DEAs/NEAs bei PDAs die deterministische Variante echt schwächer ist als die nicht-deterministische. Daher definieren die deterministischen PDAs eine eigene Sprachklasse, die *deterministisch kontextfreien Sprachen*.

Deterministische PDAs akzeptieren immer per Endzustand (aus gutem Grund, wie wir noch sehen werden).

Definition 10.12 (deterministischer Kellerautomat)
Ein *deterministischer Kellerautomat (dPDA)* ist ein PDA mit Endzuständen

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$$

der folgende Eigenschaften erfüllt:

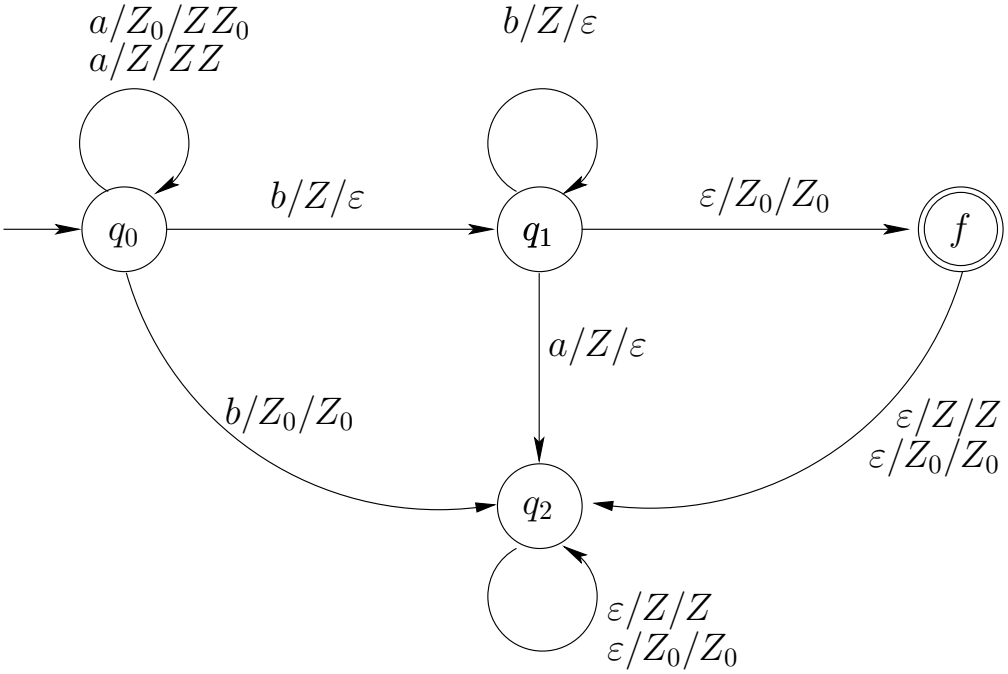
1. Für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gibt es genau eine Transition der Form (q, a, Z, γ, q') oder $(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$;
2. Wenn eine Transition das Kellerstartsymbol Z_0 entfernt, so muss sie es direkt wieder zurückschreiben; alle Transitionen, in denen Z_0 vorkommt, müssen also die Form (q, a, Z_0, Z_0, q') haben.

Man kann leicht sehen, dass es zu jeder Konfiguration eines dPDA, bei der der Keller nicht leer ist, genau eine Folgekonfiguration gibt. Die Bedingung 2 ist notwendig, damit der Keller tatsächlich nie leer wird (denn eine Konfiguration mit leerem Keller kann keine Folgekonfiguration haben). Wie ein normaler PDA mit Endzuständen akzeptiert ein dPDA $\mathcal{A}$ ein Wort w gdw. $(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^{*} (q_f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $q_f \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

Beispiel 10.13

Als Beispiel für einen dPDA betrachte die folgende Variante des PDAs aus Beispiel 10.3, die ebenfalls $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ erkennt:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, f\}$;
- $\Gamma = \{Z, Z_0\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Delta =$



Im Unterschied zum Automaten aus Beispiel 10.3 ist f ein Endzustand geworden, der Übergang von q_1 nach f entfernt Z_0 nicht mehr vom Keller (weil das nicht erlaubt wäre) und der „Papierkorbzustand“ q_2 ist hinzugekommen.

Da die Arbeitsweise von dPDAs durchaus etwas subtil ist, hier zwei Hinweise zum vorangegangenen Beispiel:

- Auf manchen Eingaben gibt es mehr als eine Berechnung. Als Beispiel betrachte man die Eingabe *aabb*. Nachdem diese gelesen wurde, befindet sich der PDA im Zustand q_1, der kein Endzustand ist. Man kann jedoch den Endzustand f in einem weiteren Schritt erreichen, also wird die Eingabe *aabb* akzeptiert. Danach kann man im Prizip noch den Nichtendzustand q_2 erreichen und in diesem beliebig oft loopen (was aber nicht sinnvoll ist).
- Trotz des Determinismus können manche Eingaben wie z.B. *ba* nicht vollständig gelesen werden.

Eine interessante Eigenschaft von deterministischen PDAs ist, dass für sie das Wortproblem in *Linearzeit* (also sehr effizient) entschieden werden kann. Aus diesem Grund spielen dPDAs im Gebiet des Compilerbaus eine wichtige Rolle.

Definition 10.14
Eine formale Sprache L heißt *deterministisch kontextfrei* wenn es einen dPDA $\mathcal{A}$ gibt mi $L(\mathcal{A}) = L$. Die Menge aller deterministisch kontextfreien Sprachen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_2^d$.

Folgende Einordnung der deterministisch kontextfreien Sprachen ist leicht vorzunehmen.

Satz 10.15
$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^d$, da jeder DEA $\mathcal{A}$ als dPDA ohne ε-Übergänge und mit nur einem Kellersymbol Z_0 betrachtet werden kann, der zudem seinen Keller nie modifiziert: aus jedem Übergang $\delta(q, a) = q'$ des DEA wird die Transition (q, a, Z_0, Z_0, q') des dPDA. Die Inklusion ist echt, da mit Beispiel 10.13 $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{L}_2^d$, wohingegen $L \notin \mathcal{L}_3$. Die Inklusion $\mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$ gilt wegen Satz 10.6. □

Wie bereits erwähnt sind dPDAs echt schwächer als PDAs, d.h. die deterministisch kontextfreien Sprachen sind eine *echte Teilmenge* der kontextfreien Sprachen. Der Beweis beruht auf dem folgenden Resultat. Wir verzichten hier auf den etwas aufwendigen Beweis und verweisen z.B. auf [Koz06].

Satz 10.16
$\mathcal{L}_2^d$ ist unter Komplement abgeschlossen.

Zur Erinnerung: die kontextfreien Sprachen selbst sind mit Korollar 9.5 nicht unter Komplement abgeschlossen. Man kann zeigen, dass die deterministisch kontextfreien Sprachen nicht unter Schnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen sind.

Satz 10.17
$\mathcal{L}_2^d \subset \mathcal{L}_2$.

Beweis. Mit Satz 10.16 ist der folgende sehr einfache Beweis möglich: wäre $\mathcal{L}_2^d = \mathcal{L}_2$, so wäre mit Satz 10.16 $\mathcal{L}_2$ unter Komplement abgeschlossen, was jedoch ein Widerspruch zu Korollar 9.5 ist.

Dieser Beweis liefert jedoch keine konkrete Sprache, die kontextfrei aber nicht deterministisch kontextfrei ist. Eine solche findet man beispielsweise wie folgt: in der Übung zeigen wir, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall v \in \{a, b\}^* : w \neq vv\}$$

kontextfrei ist (durch Angeben einer Grammatik), ihr Komplement

$$\overline{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists v \in \{a, b\}^* : w = vv\}$$

aber nicht (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen). Wäre $L \in \mathcal{L}_2^d$, so wäre mit Satz 10.16 auch $\overline{L} \in \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$, womit ein Widerspruch hergestellt ist. □

Auch die Sprache $\{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ aus Beispiel 10.4 ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei, der Beweis ist allerdings aufwändig. Intuitiv ist der Grund aber, dass das nicht-deterministische „Raten“ der Wortmitte essentiell ist. Dies wird auch dadurch illustriert, dass die Sprache $\{w\, c\, \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$, bei der die Wortmitte explizit durch das Symbol c angezeigt wird, sehr einfach mit einem dPDA erkannt werden kann.

Zum Abschluss bemerken wir noch, dass das akzeptieren per leerem Keller bei dPDAs zu Problemen führt.

Lemma 10.18
Es gibt keinen dPDA, der die endliche (also reguläre) Sprache $L = \{a, aa\}$ per leerem Keller erkennt.

Beweis. Angenommen, der dPDA $\mathcal{A}$ erkennt L per leerem Keller. Da $a \in L$ gibt es eine Konfigurationsfolge

$$\Omega = (q_0, a, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, w_1, \gamma_1) \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} (q_n, w_n, \gamma_n)$$

mit $w_n = \gamma_n = \varepsilon$. Also gibt es auch Konfigurationsfolged

$$\Omega' = (q_0, aa, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, u_1, \gamma_1) \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} (q_n, u_n, \gamma_n)$$

mit $u_n = a$ und $\gamma_n = \varepsilon$ und da $\mathcal{A}$ deterministisch ist das die *einzige* Konfigurationsfolge, die das Präfix a der Eingabe aa verarbeitet. Wegen $\gamma_n = \varepsilon$ hat (q_n, u_n, γ_n) keine Folgekonfiguration, also wird aa nicht akzeptiert (dies kann per Definition nur nach Lesen der gesamten Eingabe geschehen). Widerspruch. □

Man kann diese Probleme beheben, indem man ein explizites Symbol für das Wortende einführt, das auch in Transitionen von dPDAs verwendet werden kann. Mit einem solchen Symbol sind Akzeptanz per Endzustand und Akzeptanz per leerem Keller auch für dPDAs äquivalent.

III. Berechenbarkeit

Einführung

Aus der Sicht der Theorie der *formalen Sprachen* (Teil I + II dieses Skriptes) geht es in diesem Teil darum, die Typ-0- und die Typ-1-Sprachen zu studieren und folgende Fragen zu beantworten:

- Was sind geeignete Automatenmodelle?
- Welche Abschlußeigenschaften gelten?
- Wie lassen sich die zentralen Entscheidungsprobleme (Wortproblem, Leerheitsproblem, Äquivalenzproblem) lösen?

Eine viel wichtigere Sicht auf den Inhalt von Teil III ist aber eine andere, nämlich als Einführung in die *Theorie der Berechenbarkeit*. Hierbei handelt es sich um eine zentrale Teildisziplin der theoretischen Informatik, in der Fragen wie die folgenden studiert werden:

- Gibt es Probleme, die prinzipiell nicht berechenbar sind?
- Was für Berechnungsmodelle gibt es?
- Sind alle Berechnungsmodelle (verschiedene Rechnerarchitekturen, Programmiersprachen, mathematische Modelle) gleich mächtig?
- Welche Ausdrucksmittel von Programmiersprachen sind verzichtbar, weil sie zwar der Benutzbarkeit dienen, aber die Berechnungsstärke nicht erhöhen?

In diesem Zusammenhang interessieren wir uns für

- die *Berechnung (partieller oder totaler) Funktionen*

  $$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

  wobei k die *Stelligkeit* der Funktion bezeichnet; Beispiele sind etwa:

  - Die konstante Nullfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$;
  - Die binäre Additionsfunktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = x + y$;

  Manchmal betrachten wir auch Funktionen $f : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$, wobei Σ ein Alphabet ist. Ein Beispiel ist die Konkatenationsfunktion.

- *Entscheidungsprobleme*, also Fragen, die nur mit "ja" oder "nein" beantwortet werden können, wie beispielsweise das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken: gegeben eine Grammatik G, ist $L(G) = \emptyset$?

  Wir werden Entscheidungsprobleme als Mengen $P \subseteq \Sigma^*$ formalisieren, für ein geeignetes Alphabet Σ. Ein Entscheidungsproblem ist also nichts anderes als eine formale Sprache! Das erwähnte Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken würde dann dargestellt als Menge

  $$\{\text{code}(G) \mid G \text{ ist kontextfreie Grammatik mit } L(G) = \emptyset\}$$

  wobei code(G) eine geeignete Kodierung der Grammatik G als Wort ist.

Intuitiv heißt eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *berechenbar* wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ nach endlicher Zeit den Funktionswert $f(x_1, \ldots, x_k)$ ausgibt. Ein Entscheidungsproblem $P \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar* wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe w nach endlicher Zeit "ja" zurückgibt wenn $w \in P$ und "nein" sonst. Man beachte: diese Beschreibungen von Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit sind so noch *keine* formalen Definitionen sind, da wir nicht eindeutig festgelegt haben, was unter dem Begriff "Algorithmus" zu verstehen ist.

Um sich klarzumachen, dass eine gegebene Funktion berechenbar oder ein Problem entscheidbar ist, genügt es, einen entsprechenden Algorithmus für die Funktion bzw. das Problem anzugeben. Dies kann in Form eines Pascal-, Java- oder C-*Programmes* oder in Form einer *abstrakten Beschreibung* der Vorgehensweise bei der Berechnung geschehen. Zum Beispiel hatten wir in den Teilen I und II die Entscheidbarkeit von verschiedenen Problemen (Wortproblem, Leerheitsproblem, Äquivalenzproblem, ...) dadurch begründet, dass wir auf abstrakte Weise beschrieben haben, wie man die Probleme mit Hilfe eines Rechenverfahrens entscheiden kann. Um etwa das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken zu lösen, kann man zunächst die Grammatik in Chomsky-Normalform wandeln (wir haben im Detail beschrieben, wie diese Wandlung realisiert werden kann) und dann den CYK-Algorithmus anwenden (den wir in Form von Pseudocode beschrieben haben). Aus dieser und ähnlichen Beschreibungen kann man jeweils leicht ein Pascal-, Java-, etc. Programm zur Entscheidung des Problems gewinnen. Für derartige Argumente wird keine formale Definition des Begriffes "Algorithmus" benötigt, denn jede vernünftige Definition diese Art würde die erwähnte Programme einschließen.

Eine fundamentale Einsicht der Theorie der Berechenbarkeit ist, dass es wohldefinierte (und für die Informatik hochgradig relevante!) Funktionen gibt, die nicht berechenbar sind, und analog dazu Entscheidungsprobleme, die nicht entscheidbar sind. Beim Nachweis der Nichtberechenbarkeit bzw. Nichtentscheidbarkeit ist es nicht mehr ausreichend, einen intuitiven und nicht näher spezifizierten Begriff von Algorithmus zu verwenden: die Aussage, dass es *keinen Algorithmus für ein Entscheidungsproblem gibt*, bezieht sich implizit auf *alle* Algorithmen (für jeden Algorithmus gilt: er entscheidet nicht das betrachtete Problem). Aus diesem Grund benötigt man für das Studium der *Grenzen der Berechenbarkeit* eine formale Definition dessen, was man unter einem Algorithmus

versteht. Zunächst gibt es scheinbar sehr viele Kandidaten für das zugrunde gelegte *Berechnungsmodell*: Eine Programmiersprache? Welche der vielen Sprachen ist geeignet? Imperativ, funktional, objektorientiert? Verwendet man ein hardwarenahes Modell, wie etwa das Modell eines Mikroprozessors? Oder ein abstraktes mathematisches Modell?

Es stellt sich heraus, dass ein geeignetes Berechnungsmodell folgende Eigenschaften erfüllen sollte:

1) es sollte **einfach** sein, damit formale Beweise erleichtert werden (z.B. nicht die Programmiersprache Java),
2) es sollte **berechnungsuniversell** sein, d.h. alle intuitiv berechenbaren Funktionen können damit berechnet werden (bzw. alle intuitiv entscheidbaren Mengen entschieden werden können)—also keine endlichen Automaten, denn deren Berechnungsstärke ist viel zu schwach.

Wir werden drei Berechnungsmodelle betrachten:

- Turingmaschinen als besonders einfaches aber dennoch berechnungsuniverselles Modell
- WHILE-Programme als Abstraktion imperativer Programmiersprachen (im Prinzip handelt es sich um eine möglichst einfache, aber immernoch berechnungsuniverselle solche Sprache)
- μ-rekursive Funktionen als funktionsbasiertes, mathematisches Berechnungsmodell.

Es gibt noch eine Vielzahl anderer Modelle: Registermaschinen, GOTO-Programme, k-Zählermaschinen mit $k \geq 2$, Java-Programme, usw. Es hat sich aber interessanterweise herausgestellt, dass all diese vollkommen unterschiedlichen Modelle *äquivalent* sind, d.h. dieselbe Klasse von Funktionen berechnen (bzw. Problemen entscheiden). Zudem ist es bisher niemandem gelungen, ein formales Berechnungsmodell zu finden, das

- realistisch erscheint (also im Prinzip in der wirklichen Welt realisierbar ist),
- Funktionen berechnen kann, die in den oben genannten Modellen nicht berechenbar sind.

Aus diesen beiden Gründen geht man davon aus, dass die genannten Modelle *genau den intuitiven Berechenbarkeitsbegriff* formalisieren. Diese Überzeugung nennt man die:

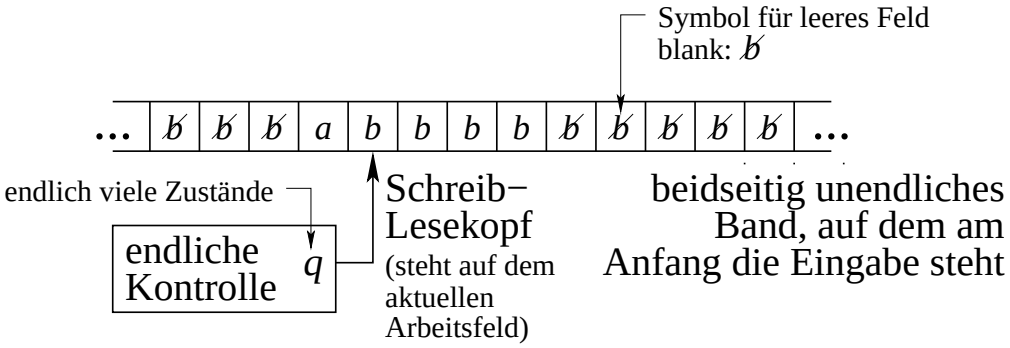
Church-Turing-These:
Die (intuitiv) berechenbaren Funktionen sind genau die mit Turingmaschinen (und damit mit WHILE-, Java-Programmen, Registermaschinen, ...) berechenbaren Funktionen.

Man könnte die These äquivalent auch für Entscheidungsprobleme formulieren. Man spricht hier von einer *These* und nicht von einem *Satz*, da es nicht möglich ist, diese Aussage formal zu beweisen. Dies liegt daran, dass der intuitive Berechenbarkeitsbegriff ja nicht formal definierbar ist. Es gibt aber gute Indizien, die für die Richtigkeit der These sprechen, insbesondere die große Vielzahl existierender Berechnungsmodelle, die sich als äquivalent herausgestellt haben.

11. Turingmaschinen

Turingmaschinen wurden um 1936 von dem englischen Mathematiker und Informatiker Alan Turing als besonders einfaches Berechnungsmodell vorgeschlagen. In den Worten des bekannten Komplexitätstheoretikers Christos Papadimitriou: "It is amazing how little you need to have everything". Wir verwenden Turingmaschinen einerseits als universelles Berechnungsmodell und andererseits als Werkzeug zum Definieren von formalen Sprachen. Insbesondere werden wir sehen, dass Turingmaschinen genau die Typ 0-Sprachen erkennen und eine entsprechend eingeschränkte Turingmaschine als Automatenmodell für Typ 1-Sprachen verwendet werden kann.

Die schematische Darstellung einer Turingmaschine ist wie folgt:



Das Arbeitsband ist beidseitig unendlich. Zu jedem Zeitpunkt sind jedoch nur *endlich viele* Symbole auf dem Band verschieden von ß. Das Verhalten der Turingmaschine hängt ab vom aktuellen Zustand und vom Alphabetssymbol, das sich unter dem Schreib-Lesekopf findet. Ein Schritt der Maschine besteht darin, das Zeichen unter dem Schreib-Lesekopf zu ersetzen und dann den Kopf nach rechts oder links (oder gar nicht) zu bewegen.

Definition 11.1 (Turingmaschine)
Eine *Turingmaschine über dem Eingabealphabet* Σ hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$, wobei

- Q endliche *Zustandsmenge* ist,
- Σ das *Eingabealphabet* ist,
- Γ das *Arbeitsalphabet* ist mit $\Sigma \subseteq \Gamma$, ß $\in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $q_0 \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $F \subseteq Q$ die *Endzustandsmenge* ist und
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{r, l, n\} \times Q$ die *Übergangsrelation* ist.

Dabei bedeutet der Übergang $(q, a, a', \begin{matrix} r \\ l \\ n \end{matrix}, q')$:

- Im Zustand q
- mit a auf dem gerade gelesenen Feld (Arbeitsfeld)

kann die Turingmaschine $\mathcal{A}$

- das Symbol a durch a' ersetzen,
- in den Zustand q' gehen und
- den Schreib-Lesekopf entweder um ein Feld nach rechts (r), links (l) oder gar nicht (n) bewegen.

Die Maschine $\mathcal{A}$ heißt *deterministisch*, falls es für jedes Paar $(q, a) \in Q \times \Gamma$ höchstens ein Tupel der Form $(q, a, \ldots, \ldots) \in \Delta$ gibt.

NTM steht im folgenden für (möglicherweise) nichtdeterministische Turingmaschinen und *DTM* für deterministische.

Bei einer DTM gibt es also zu jedem Berechnungszustand höchstens einen Folgezustand, während es bei einer NTM mehrere geben kann.

Einen Berechnungszustand (*Konfiguration*) einer Turingmaschine kann man beschreiben durch ein Wort $\alpha q \beta$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma^*,\ q \in Q$:

- q ist der momentane Zustand
- α ist die Beschriftung des Bandes links vom Arbeitsfeld
- β ist die Beschriftung des Bandes beginnend beim Arbeitsfeld nach rechts

Dabei werden (um endliche Wörter $\alpha,\ \beta$ zu erhalten) unendlich viele blanks weggelassen, d.h. α und β umfassen mindestens den Bandabschnitt, auf dem Symbole $\neq \not b$ stehen.

Beispiel:
Der Zustand der Maschine zu Beginn des Abschnitts wird durch die Konfiguration *aqbbbb*, aber auch durch $\not b \not b aqbbbb \not b$ beschrieben.

Formal werden Zustandsübergänge durch die Relation "$\vdash_{\mathcal{A}}$" auf der Menge aller Konfigurationen beschrieben. Genauer gesagt ermöglicht die Übergangsrelation Δ die folgenden *Konfigurationsübergänge*:

Es seien $\alpha, \beta \in \Gamma^*,\ a, b, a' \in \Gamma,\ q, q' \in Q$. Es gilt

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha q a \beta & \vdash_{\mathcal{A}} & \alpha a' q' \beta & \text{falls} \quad (q, a, a', r, q') \in \Delta \\
\alpha q & \vdash_{\mathcal{A}} & \alpha a' q' & \text{falls} \quad (q, \not b, a', r, q') \in \Delta \\
\alpha b q a \beta & \vdash_{\mathcal{A}} & \alpha q' b a' \beta & \text{falls} \quad (q, a, a', l, q') \in \Delta \\
q a \beta & \vdash_{\mathcal{A}} & q' \not b a' \beta & \text{falls} \quad (q, a, a', l, q') \in \Delta \\
\alpha q a \beta & \vdash_{\mathcal{A}} & \alpha q' a' \beta' & \text{falls} \quad (q, a, a', n, q') \in \Delta \\
\alpha q & \vdash_{\mathcal{A}} & \alpha q' a' & \text{falls} \quad (q, \not b, a', n, q') \in \Delta
\end{array}
$$

Weitere Bezeichnungen:

- Gilt $k \vdash_{\mathcal{A}} k'$, so heißt k' *Folgekonfiguration* von k.
- Die Konfiguration $\alpha q \beta$ heißt *akzeptierend*, falls $q \in F$.
- Die Konfiguration $\alpha q \beta$ heißt *Stoppkonfiguration*, falls sie keine Folgekonfiguration hat.
- Eine *Berechnung* von $\mathcal{A}$ ist eine endliche oder unendliche Konfigurationsfolge

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} k_2 \vdash_{\mathcal{A}} \cdots$$

Offensichtlich gibt es für DTMs nur eine einzige maximale Berechnung, die in einer fixen Konfiguration k_0 beginnt; für NTMs kann es dagegen mehrere solche Berechnungen geben.

Die folgende Definition formalisiert beide Anwendungen von Turingmaschinen: das Berechnen von Funktionen und das Erkennen von Sprachen. Im ersten Fall steht die Eingabe $(w_1, \ldots, w_n)$ in Form des Wortes $w_1 \not b w_2 \not b \cdots \not b w_n$ auf dem Band, wobei sich der Kopf zu Anfang auf dem ersten (linkeststehenden) Symbol von w_1 befindet. Nachdem die Maschine eine Stoppkonfiguration erreicht hat, findet sich die Ausgabe ab der Kopfposition bis zum ersten Symbol aus $\Gamma \setminus \Sigma$. Beim Erkennen von Sprachen steht das Eingabewort w auf dem Band und der Kopf befindet sich anfangs über dem ersten Symbol von w. Ein positives Berechnungsergebnis wird dann über das Stoppen in einem Endzustand signalisiert.

Definition 11.2 (Turing-berechenbar, Turing-erkennbar)

1) Die partielle Funktion $f : (\Sigma^*)^n \to \Sigma^*$ heißt *Turing-berechenbar*, falls es eine DTM $\mathcal{A}$ gibt mit
   a) der Definitionsbereich $\mathrm{dom}(f)$ von f besteht aus den Tupeln $(w_1, \ldots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ so dass $\mathcal{A}$ ab der Konfiguration

   $$k_0 = q_0 w_1 \not b w_2 \not b \ldots \not b\, w_n$$

   eine Stoppkonfiguration erreicht.
   b) wenn $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}(f)$, dann hat die von k_0 erreichte Stoppkonfiguration k die Form $uqxv$ mit
      - $x = f(w_1, \ldots, w_n)$
      - $v \in (\Gamma \setminus \Sigma) \cdot \Gamma^* \cup \{\varepsilon\}$
2) Die von der NTM $\mathcal{A}$ *erkannte Sprache* ist

   $$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash_{\mathcal{A}}^* k, \text{ wobei } k \textit{ akzeptierende Stoppkonfiguration} \text{ ist}\}.$$

   Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *Turing-erkennbar*, falls es eine NTM $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Nach Punkt b) dürfen vor und nach der Ausgabe des Funktionswertes noch Überbleibsel der Berechnung stehen. Beispielsweise entspricht die Stoppkonfiguration *aaaqbaabc*$\not b$*acbca* der Ausgabe *baabc* wenn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Per Definition werden Endzustände nur für das Erkennen von Sprachen verwendet werden, aber *nicht* für das Berechnen von Funktionen.

Beachte:

1) Wir verwenden *partielle* Funktionen, da Turingmaschinen nicht anhalten müssen; für manche Eingaben ist der Funktionswert daher *nicht definiert*.
2) Bei berechenbaren Funktionen betrachten wir nur *deterministische* Maschinen, da sonst der Funktionswert nicht eindeutig sein müsste.
3) Bei $|\Sigma| = 1$ kann man Funktionen von $(\Sigma^*)^n \to \Sigma^*$ als Funktionen von $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ auffassen (a^k entspricht k). Wir unterscheiden im folgenden nicht immer explizit zwischen beiden Arten von Funktionen.

(4) Es gibt *zwei Arten*, auf die eine Turingmaschine ein Eingabewort *verwerfen* kann: entweder sie erreicht eine Stoppkonfiguration mit einem nicht-Endzustand oder sie stoppt nicht.

Beispiel:

Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$$

ist Turing-berechenbar. Wie kann eine Turingmaschine die Anzahl der a's auf dem Band verdoppeln?

Idee:

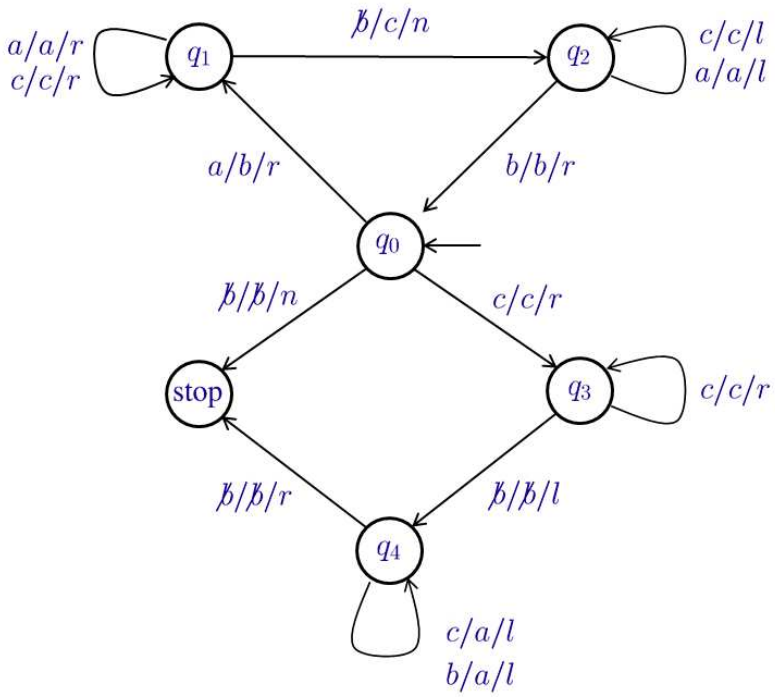
- Ersetze das erste a durch b,
- laufe nach rechts bis zum ersten blank, ersetze dieses durch c,
- laufe zurück bis zum zweiten a (unmittelbar rechts vom b), ersetze dieses durch b,
- laufe nach rechts bis zum ersten blank etc.
- Sind alle a's aufgebraucht, so ersetze noch die b's und c's wieder durch a's.

Dies wird durch die folgende Übergangsrelation realisiert:

$(q_0, \not b, \not b, n, \text{stop})$,	$2 \cdot 0 = 0$
(q_0, a, b, r, q_1),	ersetze a durch b $\quad(\star)$
(q_1, a, a, r, q_1),	laufe nach rechts über a's
(q_1, c, c, r, q_1),	und bereits geschriebene c's
$(q_1, \not b, c, n, q_2)$,	schreibe weiteres c
(q_2, c, c, l, q_2),	laufe zurück über c's und
(q_2, a, a, l, q_2),	a's
(q_2, b, b, r, q_0),	bei erstem b eins nach rechts und weiter wie $(\star)$ oder
(q_0, c, c, r, q_3),	alle a's bereits ersetzt
(q_3, c, c, r, q_3),	laufe nach rechts bis Ende der c's
$(q_3, \not b, \not b, l, q_4)$,	letztes c erreicht
(q_4, c, a, l, q_4),	ersetze c's und b's
(q_4, b, a, l, q_4),	durch a's
$(q_4, \not b, \not b, r, \text{stop})$	bleibe am Anfang der erzeugten $2n$ a's stehen

Beachte, dass "stop" hier einen ganz normalen Zustand bezeichnet. Da er in keinem Tupel der Übergangsrelation ganz links erscheint, ist jede Konfiguration der Form $\alpha\text{stop}\beta$ eine Stoppkonfiguration.

In graphischer Darstellung stellen wir obige Turingmaschine wie folgt dar. Hierbei bedeutet beispielsweise die Kantenbeschriftung $a/b/r$, dass das a auf dem Arbeitsfeld durch b ersetzt wird und sich der Kopf einen Schritt nach rechts bewegt.



Wie bei den endlichen Automaten kennzeichnen wir den Startzustand durch einen eingehenden Pfeil und Endzustände durch einen Doppelkreis. Da obige DTM eine Funktion berechnet (im Gegensatz zu: eine Sprache erkennt), spielen die Endzustände hier jedoch keine Rolle.

Man sieht, dass das Programmieren von Turingmaschinen recht umständlich ist. Wie bereits erwähnt, betrachtet man solche einfachen (und unpraktischen) Modelle, um das Führen von Beweisen zu erleichtern. Wir werden im folgenden häufig nur die Arbeitsweise einer Turingmaschine beschreiben, ohne die Übergangsrelation in vollem Detail anzugeben.

Beispiel:
Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist Turing-erkennbar Die Turingmaschine, die L erkennt, geht wie folgt vor:

- Sie ersetzt das erste a durch a', das erste b durch b' und das erste c durch c';
- Läuft zurück und wiederholt diesen Vorgang;

- Falls dabei ein a rechts von einem b oder c steht, verwirft die TM direkt (indem sie in eine nicht-akzeptierende Stoppkonfiguration wechselt); ebenso, wenn ein b rechts von einem c steht;
- Dies wird solange gemacht, bis nach erzeugtem c' ein $\not b$ steht.
- Zum Schluß wird zurückgelaufen und überprüft, dass keine unersetzten a oder b übrig geblieben sind.

Eine solche Turingmaschine erkennt tatsächlich L: sie akzeptiert gdw.

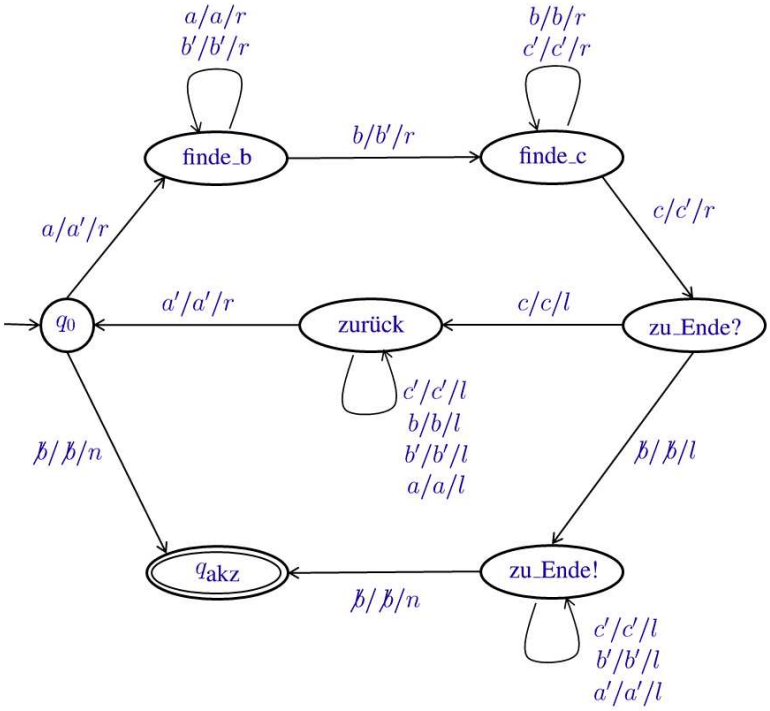
1. die Eingabe dieselbe Anzahl a's wie b's wie c's hat (denn es wurde jeweils dieselbe Anzahl ersetzt und danach waren keine a's, b' und c's mehr übrig);
2. in der Eingabe alle a's vor b's vor c's stehen.

Im Detail definiert man die Turingmaschine $\mathcal{A}$ wie folgt:
$\mathcal{A} = (\{q_0, q_{akz}, finde\_b, finde\_c, zu\_Ende\_?, zu\_Ende\_!, zurück\}$,
$\{a, b, c\}$,
$\{a, a', b, b', c, c', \not b\}$,
$q_0, \Delta, \{q_{akz}\})$ mit $\Delta =$

$\{(q_0,$	$\not b,$	$\not b,$	$N,$	$q_{akz}),$
$(q_0,$	$a,$	$a',$	$R,$	$finde\_b),$
$(finde\_b,$	$a,$	$a,$	$R,$	$finde\_b),$
$(finde\_b,$	$b',$	$b',$	$R,$	$finde\_b),$
$(finde\_b,$	$b,$	$b',$	$R,$	$finde\_c),$
$(finde\_c,$	$b,$	$b,$	$R,$	$finde\_c),$
$(finde\_c,$	$c',$	$c',$	$R,$	$finde\_c),$
$(finde\_c,$	$c,$	$c',$	$R,$	$zu\_Ende\_?),$
$(zu\_Ende\_?,$	$c,$	$c,$	$L,$	$zurück),$
$(zurück,$	$c',$	$c',$	$L,$	$zurück),$
$(zurück,$	$b,$	$b,$	$L,$	$zurück),$
$(zurück,$	$b',$	$b',$	$L,$	$zurück),$
$(zurück,$	$a,$	$a,$	$L,$	$zurück),$
$(zurück,$	$a',$	$a',$	$R,$	$q_0),$
$(zu\_Ende\_?,$	$\not b,$	$\not b,$	L	$zu\_Ende\_!),$
$(zu\_Ende\_!,$	$c',$	$c',$	$L,$	$zu\_Ende\_!),$
$(zu\_Ende\_!,$	$b',$	$b',$	$L,$	$zu\_Ende\_!),$
$(zu\_Ende\_!,$	$a',$	$a',$	$L,$	$zu\_Ende\_!),$
$(zu\_Ende\_!,$	$\not b,$	$\not b,$	$N,$	$q_{akz})\}$

Beachte: wenn die Maschine z.B. im Zustand $finde\_c$ ist und ein a liest, so ist sie in einer Stoppkonfiguration. Da $finde\_c$ kein Endzustand ist, handelt es sich um eine verwerfende Stoppkonfiguration. Also verwirft die Maschine, wenn in der Eingabe nach einer Folge von a's noch ein b erscheint.

In graphischer Darstellung sieht diese Maschine wie folgt aus:



Varianten von Turingmaschinen:
In der Literatur werden verschiedene Versionen von Turingmaschine definiert, die aber alle äquivalent zueinander sind, d.h. dieselben Sprachen erkennen und dieselben Funktionen berechnen. Hier zwei Beispiele:

- Turingmaschinen mit nach links begrenztem und nur nach rechts unendlichem Arbeitsband
- Turingmaschinen mit mehreren Bändern und Schreib-Leseköpfen

Die Äquivalenz dieser Modelle ist ein Indiz für die Gültigkeit der Church-Turing-These.

Wir betrachten das zweite Beispiel genauer und zeigen Äquivalenz zur in Definition 11.1 eingeführten 1-Band-TM.

Definition 11.3 (k-Band-TM)
Eine *k-Band-NTM* hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ mit

- $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F$ wie in Definition 11.1 und
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma^k \times \Gamma^k \times \{r, l, n\}^k \times Q$.

Dabei bedeutet $(q, (a_1, \ldots, a_k), (b_1, \ldots, b_k), (d_1, \ldots, d_k), q') \in \Delta$:

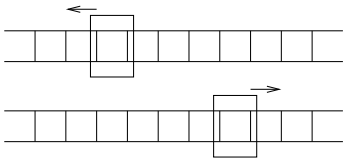
- Vom Zustand q aus
- mit $a_1, \ldots, a_k$ auf den Arbeitsfeldern der k Bänder

kann $\mathcal{A}$

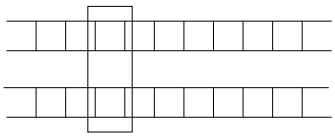
- das Symbol a_i auf dem i-ten Band durch b_i ersetzen,
- in den Zustand q' gehen und
- die Schreib-Leseköpfe der Bänder entsprechend d_i bewegen.

Das erste Band wird (o.B.d.A.) als Ein- und Ausgabeband verwendet.

Beachte:
Wichtig ist hier, dass sich die Köpfe der verschiedenen Bänder unabhängig bewegen können:



Wären die Köpfe gekoppelt, so hätte man im Prinzip nicht mehrere Bänder, sondern ein Band mit mehreren Spuren:



k Spuren erhält man einfach, indem man eine normale NTM (nach Definition 11.1) verwendet, die als Bandalphabet Γ^k statt Γ hat.

Offenbar kann man jede 1-Band-NTM (nach Definition 11.1) durch eine k-Band-NTM ($k > 1$) simulieren, indem man nur das erste Band wirklich verwendet. Der nächste Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 11.4
Wird die Sprache L durch eine k-Band-NTM erkannt, so auch durch eine 1-Band-NTM.

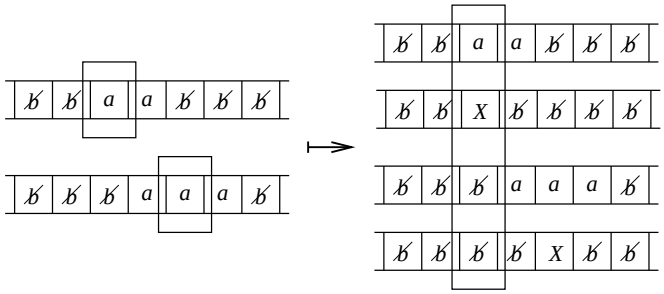
Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ eine k-Band-NTM. Gesucht ist eine 1-Band-NTM $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$. Wähle ein beliebiges $X \in \Gamma$.

Arbeitsalphabet von $\mathcal{A}'$: $\Gamma^{2k} \cup \Sigma \cup \{\not b\}$;

- $\Sigma \cup \{\not b\}$ wird für Eingabe benötigt;
- Γ^{2k} sorgt dafür, dass $2k$ Spuren auf dem Band von $\mathcal{A}'$ zur Verfügung stehen.

Idee: Jeweils 2 Spuren kodieren ein Band von $\mathcal{A}$.

- Die erste Spur enthält die Bandbeschriftung.
- Die zweite Spur enthält eine Markierung X (und sonst blanks), die zeigt, wo das Arbeitsfeld des Bandes ist, z.B.



Die 1-Band TM $\mathcal{A}'$ macht jeweils mehrere Schritte, um einen einzelnen Schritt von $\mathcal{A}$ zu simulieren. Im Detail arbeitet $\mathcal{A}'$ wie folgt.

Initialisierung: Zunächst wird die Anfangskonfiguration

$$q_0 a_1 \dots a_m$$

von $\mathcal{A}'$ in die Repräsentation der entsprechenden Anfangskonfiguration von $\mathcal{A}$ umgewandelt (durch geeignete Übergänge):

$\not b$	$\not b$	a_1	a_2	$\dots$	a_m	$\not b$	Spur 1 und 2 kodieren
$\not b$	$\not b$	X	$\not b$	$\dots$	$\not b$	$\not b$	Band 1
$\not b$	$\not b$	$\not b$	$\not b$	$\dots$	$\not b$	$\not b$	Spur 3 und 4 kodieren
$\not b$	$\not b$	X	$\not b$	$\dots$	$\not b$	$\not b$	Band 2
		$\vdots$					

Simulation eines Überganges von $\mathcal{A}'$:

- Von links nach rechts suche die mit X markierten Felder. Dabei merke man sich (im Zustand von $\mathcal{A}'$) die Symbole, die jeweils über dem X stehen. Außerdem zählt man (im Zustand von $\mathcal{A}'$), wie viele X man schon gelesen hat, um festzustellen, wann das k-te (und letzte) X erreicht ist. Man ermittelt so das aktuelle Tupel $(a_1, \dots, a_k)$.
- entscheide nichtdeterministisch, welcher Übergang

  $$(q, (a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k), (d_1, \dots, d_k), q') \in \Delta$$

  von $\mathcal{A}$ stattfindet.
- Von rechts nach links gehend ersetze die a_i bei den X-Marken jeweils durch das entsprechende b_i und verschiebe die X-Marken gemäß d_i.
- Bleibe bei der am weitesten links stehenden X-Markierung und gehe in Zustand q'.

In dieser Konstruktion hat $\mathcal{A}'$ im Prinzip dieselben Zustände wir $\mathcal{A}$. Also stoppt $\mathcal{A}$ auf Eingabe w in akzeptierender Stoppkonfiguration gdw. $\mathcal{A}'$ in akzeptierender Stoppkonfiguration stoppt. □

Bemerkung 11.5.

1) War $\mathcal{A}$ deterministisch, so liefert obige Konstruktion auch eine deterministische 1-Band-Turingmaschine.
2) Diese Konstruktion kann auch verwendet werden, wenn man sich für die berechnete Funktion interessiert. Dazu muss man am Schluss (wenn $\mathcal{A}$ in Stoppkonfiguration ist) in der Maschine $\mathcal{A}'$ noch die Ausgabe geeignet aufbereiten.

Wegen Satz 11.4 und Bemerkung 11.5 können wir von nun an ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei der Konstruktion von Turingmaschinen eine beliebige (aber feste) Zahl von Bändern verwenden.

Bei der Definition von Turing-berechenbar haben wir uns von vornherein auf *deterministische* Turingmaschinen beschränkt. Der folgende Satz zeigt, dass man dies auch bei Turing-erkennbaren Sprachen machen kann, ohne an Ausdrucksstärke zu verlieren.

Satz 11.6

Zu jeder NTM gibt es eine DTM, die dieselbe Sprache erkennt.

Beweis. Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ eine NTM. Wegen Satz 11.4 und Bemerkung 11.5 genügt es, eine deterministische 3-Band-Turingmaschine $\mathcal{A}'$ zu konstruieren, so dass $L(A) = L(\mathcal{A}')$.

Die Maschine $\mathcal{A}'$ soll für wachsendes n auf dem dritten Band jeweils alle Berechnungen

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} k_2 \vdash_{\mathcal{A}} \ldots \vdash_{\mathcal{A}} k_n$$

beginnend mit der Startkonfiguration $k_0 = q_0 w$ erzeugen, also erst alle solchen Berechnungen der Länge 1, dann alle der Länge 2, usw.

Die Kontrolle, dass tatsächlich alle solchen Folgen erzeugt werden, wird auf dem zweiten Band vorgenommen. Das erste Band speichert das Eingabewort w damit man stets weiß, was k_0 sein muss.

Genauer: Es sei

$$r = \text{ maximale Anzahl von Transitionen in } \Delta \text{ pro festem Paar } (q, a) \in Q \times \Gamma$$

Dies entspricht dem maximalen Verzweigungsgrad der nichtdeterministischen Berechnung und kann direkt aus Δ abgelesen werden.

Eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_j \in \{1, \ldots, r\}$ beschreibt dann von k_0 aus für n Schritte die Auswahl der jeweiligen Transition, und somit von k_0 aus eine feste Berechnung

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} \ldots \vdash_{\mathcal{A}} k_n$$

(Wenn es in einer Konfiguration k_j weniger als i_j mögliche Nachfolgerkonfigurationen gibt, dann beschreibt $i_1, \ldots, i_n$ keine Berechnung und wird einfach übersprungen.)

Zählt man alle endlichen Wörter über $\{1, \ldots, r\}$ auf und erzeugt zu jedem Wort $i_1 \ldots i_n$ die zugehörige Berechnung, so erhält man eine Aufzählung aller endlichen Berechnungen.

$\mathcal{A}'$ realisiert dies auf den drei Bändern wie folgt:

- Auf Band 1 bleibt die Eingabe gespeichert.
- Auf dem zweiten Band werden sukzessive alle Wörter $i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, r\}^*$ erzeugt (z.B. durch normales Zählen zur Basis r).
- Für jedes dieser Wörter wird auf dem dritten Band die zugehörige Berechnung erzeugt (wenn sie existiert). Erreicht man hierbei eine akzeptierende Stoppkonfiguration von $\mathcal{A}$, so geht auch $\mathcal{A}'$ in eine akzeptierende Stoppkonfiguration.

□

12. Zusammenhang zwischen Turingmaschinen und Grammatiken

Wir zeigen zunächst den Zusammenhang zwischen *Typ-0-Sprachen* und *Turing-erkennbaren Sprachen*. Dieser beruht darauf, dass es eine Entsprechung von Ableitungen einer Typ-0-Grammatik einerseits und Berechnungen von Turingmaschinen andererseits gibt. Beim Übergang von der Turingmaschine zur Grammatik dreht sich allerdings die Richtung um:

- eine akzeptierende Berechnung beginnt mit dem zu akzeptierenden Wort
- eine Ableitung endet mit dem erzeugten Wort

Wir werden im folgenden sehen, wie man diese Schwierigkeit löst.

Satz 12.1

Eine Sprache L gehört zu $\mathcal{L}_0$ gdw. sie Turing-erkennbar ist.

Beweis. „⇒“. Es sei $L = L(G)$ für eine Typ-0-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$. Wir geben eine 2-Band-NTM an, die $L(G)$ erkennt (und nach Satz 11.4 äquivalent zu einer 1-Band-NTM ist).

1. Band: speichert Eingabe w

2. Band: es wird nichtdeterministisch und Schritt für Schritt eine Ableitung von G erzeugt.

Es wird verglichen, ob auf Band 2 irgendwann w (d.h. der Inhalt von Band 1) entsteht. Wenn ja, so geht man in akzeptierende Stoppkonfiguration, sonst werden weitere Ableitungsschritte vorgenommen.

Die Maschine geht dabei wie folgt vor:

1) Schreibe S auf Band 2, gehe nach links auf das $\not b$ vor S.

2) Gehe auf Band 2 nach rechts und wähle (nichtdeterministisch) eine Stelle aus, an der die linke Seite der anzuwendenden Produktion beginnen soll.

3) Wähle (nichtdeterministisch) eine Produktion $\alpha \longrightarrow \beta$ aus P aus, die angewendet werden soll

4) Überprüfe, ob α tatsächlich die Beschriftung des Bandstücks der Länge $|\alpha|$ ab der gewählten Bandstelle ist.

5) Falls der Test erfolgreich war, so ersetze α durch β.

   Vorher müssen bei $|\alpha| < |\beta|$ die Symbole rechts von α um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach rechts

   bzw. bei $|\alpha| > |\beta|$ um $|\alpha| - |\beta|$ Positionen nach links geschoben werden.

6) Gehe nach links bis zum ersten $\not b$ und vergleiche, ob die Beschriftung auf dem Band 1 mit der auf Band 2 übereinstimmt.

7) Wenn ja, so gehe in akzeptierenden Stoppzustand. Sonst fahre fort bei 2).

„$\Leftarrow$“. Es sei $L = L(\mathcal{A})$ für eine NTM $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$.

Wir konstruieren eine Grammatik G, die jedes Wort $w \in L(\mathcal{A})$ wie folgt erzeugt:

1. Phase: Erst wird w mit „genügend vielen“ $\not b$-Symbolen links und rechts davon erzeugt (dies passiert für jedes w, auch für $w \notin L(\mathcal{A})$).

„Genügend viele“ bedeutet dabei: so viele, wie $\mathcal{A}$ beim Akzeptieren von w vom Arbeitsband benötigt.

2. Phase: Auf dem so erzeugten Arbeitsband simuliert G die Berechnung von $\mathcal{A}$ bei Eingabe w.

3. Phase: War die Berechnung akzeptierend, so erzeuge nochmals das ursprüngliche w.

Damit man in der zweiten Phase das in der dritten Phase benötigte w nicht vergisst, verwendet man als Nichtterminalsymbole Tupel aus

$$(\Sigma \cup \{\not b\}) \times \Gamma$$

wobei das Tupel $[a, b]$ zwei Zwecken dient:

- in der ersten Komponente merkt man sich die ursprüngliche Eingabe w und
- in der zweiten Komponente simuliert man die Berechnung (die die Eingabe ja überschreiben kann).

Formale Definition:

$$N = \{S, A, B, E\} \cup Q \cup ((\Sigma \cup \{\not b\}) \times \Gamma),$$

wobei

- S, A, B zum Aufbau des Rechenbandes am Anfang,
- E zum Löschen am Schluss,
- Q zur Darstellung des aktuellen Zustandes,
- $\Sigma \cup \{\not b\}$ zum Speichern von w und
- Γ zur $\mathcal{A}$-Berechnung

dienen.

Regeln:

1. Phase: Erzeuge w und ein genügend großes Arbeitsband.

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Bq_0A \\ A &\longrightarrow [a,a]A \text{ für alle } a \in \Sigma \\ A &\longrightarrow B \\ B &\longrightarrow [\not b, \not b]B \\ B &\longrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Man erhält also somit für alle $a_1 \dots a_n \in \Sigma^*, k, l, \geq 0$:

$$S \vdash_G^* [\not b, \not b]^k q_0 [a_1, a_1] \dots [a_n, a_n] [\not b, \not b]^l$$

2. Phase: simuliert TM-Berechnung in der „zweiten Spur“:

- $p[a,b] \longrightarrow [a,b']q$
  falls $(p,b,b',r,q) \in \Delta,\ a \in \Sigma \cup \{\not b\}$
- $[a,c]p[a',b] \longrightarrow q[a,c][a',b']$
  falls $(p,b,b',l,q) \in \Delta,\ a,a' \in \Sigma \cup \{\not b\},\ c \in \Gamma$
- $p[a,b] \longrightarrow q[a,b']$
  falls $(p,b,b',n,q) \in \Delta,\ a \in \Sigma \cup \{\not b\}$

Beachte:

Da wir in der ersten Phase genügend viele Blanks links und rechts von $a_1 \dots a_n$ erzeugen können, muss in der zweiten Phase das „Nachschieben“ von Blanks am Rand nicht mehr behandelt werden.

3. Phase: Aufräumen und erzeugen von $a_1 \dots a_n$, wenn die TM akzeptiert hat

- $\begin{aligned} q[a,b] &\longrightarrow EaE \quad \text{für} \quad a \in \Sigma,\ b \in \Gamma \\ q[\not b, b] &\longrightarrow E \quad\ \ \text{für} \quad b \in \Gamma \end{aligned}$
  falls $q \in F$ und es keine Transition der Form $(q,b,\dots,\dots) \in \Delta$ gibt (d.h. akzeptierende Stoppkonfiguration erreicht)
- $E[a,b] \longrightarrow aE$ für $a \in \Sigma, b \in \Gamma$
  (Aufräumen nach rechts)
- $[a,b]E \longrightarrow Ea$ für $a \in \Sigma, b \in \Gamma$
  (Aufräumen nach links)
- $E[\not b, b] \longrightarrow E$ für $b \in \Gamma$
  (Entfernen des zusätzlich benötigten Arbeitsbandes nach rechts)
- $[\not b, b]E \longrightarrow E$ für $b \in \Gamma$
  (Entfernen des zusätzlich benötigten Arbeitsbandes nach links)
- $E \longrightarrow \varepsilon$

Man sieht nun leicht, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in L(G) \text{ gdw. } \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w. \qquad \square$$

Für Typ-0-Sprachen gelten die folgenden Abschlusseigenschaften:

Satz 12.2

1) $\mathcal{L}_0$ *ist abgeschlossen unter* $\cup, \cdot, ^*$ *und* $\cap$.

2) $\mathcal{L}_0$ *ist nicht abgeschlossen unter Komplement.*

Beweis.

1) Für die regulären Operationen $\cup, \cdot, ^*$ zeigt man dies im Prinzip wie für $\mathcal{L}_2$ durch Konstruktion einer entsprechenden Grammatik.
Damit sich die Produktionen der verschiedenen Grammatiken nicht gegenseitig beeinflussen, genügt es allerdings nicht mehr, nur die Nichtterminalsymbole der Grammatiken disjunkt zu machen.

   Zusätzlich muss man die Grammatiken in die folgende Form bringen:
Die Produktionen sind von der Form

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow v && \text{mit } u \in N_i^+ \text{ und } v \in N_i^* \\ X_a &\longrightarrow a && \text{mit } X_a \in N_i \text{ und } a \in \Sigma \end{aligned}$$

   Für den Schnitt verwendet man Turingmaschinen:

   Die NTM für $L_1 \cap L_2$ verwendet zwei Bänder und simuliert zunächst auf dem ersten die Berechnung der NTM für L_1 und dann auf dem anderen die der NTM für L_2.

   Wenn beide zu akzeptierenden Stoppkonfigurationen der jeweiligen Turingmaschinen führen, so geht die NTM für $L_1 \cap L_2$ in eine akzeptierende Stoppkonfiguration.

   Beachte:

   Es kann sein, dass die NTM für L_1 auf einer Eingabe w nicht terminiert, die NTM für $L_1 \cap L_2$ also gar nicht dazu kommt, die Berechnung der NTM für L_2 zu simulieren. Aber dann ist ja w auch nicht in $L_1 \cap L_2$.

2) Wir werden später sehen, dass Turing-erkennbaren Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen sind (Satz 16.10). $\square$

Wir werden später außerdem zeigen, dass für Turing-erkennbaren Sprachen (und damit für $\mathcal{L}_0$) alle bisher betrachteten Entscheidungsprobleme unentscheidbar sind (Sätze 16.6, 16.8, 16.9). Die Begriffe "entscheidbar" und "unentscheidbar" werden wir in Kürze formal definieren. Intuitiv bedeutet Unentscheidbarkeit, dass es keinen Algorithmus gibt, der das Problem löst.

Satz 12.3

Für $\mathcal{L}_0$ sind das Leerheitsproblem, das Wortproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Von den Sprachklassen aus der Chomsky-Hierarchie sind nun alle bis auf $\mathcal{L}_1$ (kontextsensitiv) durch geeignete Automaten/Maschinenmodelle charakterisiert. Nach Definition enthalten kontextsensitive Grammatiken nur Regeln, die *nicht verkürzend* sind, also Regeln $u \longrightarrow v$ mit $|v| \geq |u|$. Wenn man ein Terminalwort w mit einer solchen Grammatik ableitet, so wird die Ableitung also niemals ein Wort enthalten, dessen Länge größer als $|w|$ ist.

Diese Beobachtung legt folgende Modifikation von Turingmaschinen nahe: die Maschinen dürfen nicht mehr als $|w|$ Zellen des Arbeitsbandes verwenden, also nur auf dem Bandabschnitt arbeiten, auf dem anfangs die Eingabe steht. Um ein Überschreiten der dadurch gegebenen Bandgrenzen zu verhindern, verwendet man Randmarker $\not\in$, \$.

Definition 12.4 (linear beschränkter Automat)

Ein *linear beschränkter Automat (LBA)* ist eine NTM $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$, so dass

- $\$, \not\in \in \Gamma \setminus \Sigma$
- Übergänge $(q, \not\in, \ldots)$ sind nur in der Form $(q, \not\in, \not\in, r, q')$ erlaubt (linker Rand darf nicht überschritten werden).
- Übergänge $(q, \$, \ldots)$ sind nur in der Form $(q, \$, \$, l, q')$ erlaubt.
- $\not\in$ und \$ dürfen nicht geschrieben werden.

Ein gegebener LBA $\mathcal{A}$ erkennt die Sprache

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \ \not\in q_0 w \$ \vdash^* k, \text{ wobei } k \text{ akzeptierende Stoppkonfiguration ist}\}.$$

Offensichtlich muß auch ein LBA nicht unbedingt terminieren. Wie bei Turingmaschinen gilt nach der obigen Definition: terminiert ein LBA $\mathcal{A}$ auf einer gegebenen Eingabe w nicht, so ist $w \notin L(\mathcal{A})$.

Korollar 12.5

Eine Sprache L gehört zu $\mathcal{L}_1$ gdw. sie von einem LBA erkannt wird.

Beweis.

„⇒“: Verwende die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 12.1.

Da alle Produktionen von kontextsensitiven Grammatiken nichtkürzend sind (mit Ausnahme $S \longrightarrow \varepsilon$), muss man auf dem zweiten Band nur ableitbare Wörter bis zur Länge $|w|$ erzeugen (aus längeren kann nie mehr w abgeleitet werden). Daher kommt man mit $|w|$ vielen Feldern aus.

Beachte:

Zwei Bänder liefern nicht ein doppelt so langes Band, sondern ein größeres Arbeitsalphabet, vergleiche Beweis von Satz 11.4.

„⇐“: Durch Modifikation der Beweisidee von Satz 12.1 gelingt es, zu einem LBA eine Grammatik zu konstruieren, die nur nichtkürzende Regeln hat.

Idee:

Da man mit $|w|$ Arbeitsfeldern auskommt, muss man keine $[\not b, \not b]$ links und rechts von w erzeugen. Dadurch fallen dann auch die folgenden kürzenden Regeln weg:

$$E[\not b, \not b] \longrightarrow E$$

$$[\not b, \not b]E \longrightarrow E$$

Es gibt allerdings noch einige technische Probleme:

- Man muss die Randmarker $\not\in$ und \$ einführen und am Schluss löschen.
- Man muss das Hilfssymbol E und den Zustand q löschen.

Lösung:

Führe die Symbole $\not\in$, \$ sowie E und den Zustand q nicht als zusätzliche Symbole ein, sondern kodiere sie in die anderen Symbole hinein.

z.B. statt $[a, b]q[a', b'][a'', b'']$ verwende $[a, b][q, a', b'][a'', b'']$.

Basierend auf dieser Idee kann man die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 12.1 so modifizieren, dass eine kontextsensitive Grammatik erzeugt wird.

□

Satz 12.6

$\mathcal{L}_1$ ist abgeschlossen unter $\cup, \cdot, ^*, \cap$ und Komplement.

Beweis. Für $\cup, \cdot, ^*$ und $\cap$ verwende Grammatiken bzw. LBAs, analog zu $\mathcal{L}_0$.

Komplement: der Beweis ist schwierig und wird an dieser Stelle nicht geführt. Abschluß unter Komplement von $\mathcal{L}_1$ war lange ein offenes Problem und wurde dann in den 1980ern unabhängig von zwei Forschern bewiesen (Immerman und Szelepcsenyi). □

Für LBAs ist bisher nicht bekannt, ob deterministische LBAs genauso stark wie nichtdeterministische LBAs sind.

Satz 12.7

Für $\mathcal{L}_1$ sind

1. *das Wortproblem entscheidbar*
2. *das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.*

Beweis. (1) Da kontextsensitive Produktionen (bis auf Spezialfall $S \longrightarrow \varepsilon$) nichtkürzend sind, muss man zur Entscheidung „$w \in L(G)$?“ nur die Menge aller aus S ableitbaren Wörter aus $(N \cup \Sigma)^*$ der Länge $\leq |w|$ erzeugen und dann nachsehen, ob w in dieser Menge ist. Dieses Verfahren terminiert, da es nur *endlich viele* solche Wörter gibt.

(2) Werden wir später beweisen (Satz 17.6).

□

13. LOOP-Programme und WHILE-Programme

In diesem Abschnitt betrachten wir Berechnungsmodelle, die an imperative Programmiersprachen angelehnt, aber auf wesentliche Elemente reduziert sind. Dies dient zweierlei Zweck: erstens werden wir eine abstrakte Programmiersprache identifizieren, die dieselbe Berechnungsstärke wir Turingmaschinen aufweist. Dies ist ein gutes Indiz für die Gültigkeit der Church-Turing These und zeigt, dass es sinnvoll ist, Berechenbarkeit anhand von Turingmaschinen (anstelle von "echten Programmiersprachen") zu studieren. Zweitens erlauben uns die erzielten Resultate, in präziser Weise diejenigen Elemente von imperativen Programmiersprachen zu identifizieren, die für die Berechnungsvollständigkeit verantwortlich sind. Wir trennen sie damit vom bloßem "Beiwerk", das zwar angenehm für die Programmierung ist, aber in Bezug auf die Berechnungsstärke eigentlich verzichtbar.

Wir definieren zunächst eine sehr einfache Programmiersprache LOOP und erweitern sie in einem zweiten Schritt zur Programmiersprache WHILE. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Funktionen f der Form

$$\mathrm{f} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}.$$

Dies entspricht dem Spezialfall $|\Sigma| = 1$ bei Wortfunktionen, ist aber keine echte Einschränkung, da es berechenbare Kodierungsfunktionen π gibt, die Wörter über beliebigen Alphabeten Σ als natürliche Zahlen darstellen (und umgekehrt), d.h. bijektive Abbildungen $\pi : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, so dass sowohl π als auch die inverse Funktion π^{-1} berechenbar sind.

LOOP-Programme

Wir betrachten nun eine einfache imperative Programmiersprache, die genau die primitiv rekursiven Funktionen berechnen kann.

LOOP-Programme sind aus den folgenden Komponenten aufgebaut:

- Variablen: x_0, x_1, x_2, ...
- Konstanten: 0, 1, 2, ... (also die Elemente von $\mathbb{N}$)
- Trennsymbole: `;` und `:=`
- Operationssymbole: $+$ und $\dot{-}$
- Schlüsselwörter: `LOOP`, `DO`, `END`

Die folgende Definition beschreibt die wohlgeformten LOOP-Programme im Detail.

Definition 13.1 (Syntax LOOP)
Die *Syntax von LOOP-Programmen* ist induktiv definiert:

1) Jede *Wertzuweisung*

$$x_i := x_j + c \text{ und}$$
$$x_i := x_j \dot{-} c$$

für $i, j \geq 0$ und $c \in \mathbb{N}$ ist ein LOOP-Programm.

2) Falls P_1 und P_2 LOOP-Programme sind, so ist auch

$$P_1 \,;\, P_2 \qquad \textit{(Hintereinanderausführung)}$$

ein LOOP-Programm.

3) Falls P ein LOOP-Programm ist und $i \geq 0$, so ist auch

$$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END} \qquad \textit{(Loop-Schleife)}$$

ein LOOP-Programm.

Die *Semantik* dieser einfachen Sprache ist wie folgt definiert:

Bei einem LOOP-Programm, das eine k-stellige Funktion $\mathrm{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ berechnen soll:

- werden die *Variablen* $x_1, \ldots, x_k$ mit den *Eingabewerten* $n_1, \ldots, n_k$ vorbesetzt;
- erhalten alle anderen Variablen eingangs den Wert 0;
- ist die *Ausgabe* der Wert der Variable x_0 nach Ausführung des Programms.

Die einzelnen Programmkonstrukte haben die folgende Bedeutung:

1) x_i `:=` $x_j + c$
Der neue Wert der Variablen x_i ist die Summe des alten Wertes von x_j und c.

x_i `:=` $x_j \dot{-} c$
Der neue Wert der Variablen x_i ist der Wert von x_j minus c, falls dieser Wert ≥ 0 ist und 0 sonst (das nennt man auch *modifizierte Subtraktion*, angezeigt durch den Punkt über dem Minuszeichen).

2) $P_1 \,;\, P_2$
Hier wird zunächst P_1 und dann P_2 ausgeführt.

3) `LOOP` x_i `DO` P `END`
Das Programm P wird so oft ausgeführt, wie der Wert von x_i zu Beginn angibt. Änderungen des Wertes von x_i während der Ausführung von P haben keinen Einfluss auf die Anzahl der Schleifendurchläufe.

LOOP-Programme lassen zunächst nur Addition und Subtraktion von Konstanten zu, aber nicht von Variablen. Wir werden aber sehen, dass man letzteres ebenfalls ausdrücken kann. Loop-Schleifen entsprechen einer einfachen Variante der aus vielen Programmiersprachen bekannten For-Schleifen.

Definition 13.2 (LOOP-berechenbar)
Die Funktion

$$\mathrm{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

heißt *LOOP-berechenbar*, falls es ein LOOP-Programm P gibt, das f in dem folgenden Sinne berechnet:

- *Gestartet* mit $n_1, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ (und 0 in den restlichen Variablen)
- *stoppt* P mit dem Wert $\mathrm{f}(n_1, \ldots, n_k)$ in der Variablen x_0.

Beispiel:
Die Additionsfunktion ist LOOP-berechenbar:

x_0 `:=` $x_1 + 0$`;`
`LOOP` x_2 `DO` x_0 `:=` $x_0 + 1$ `END`

Basierend auf der Additionsfunktion is auch die Multiplikationsfunktion LOOP-berechenbar. Folgendes Programm steht natürlich eigentlich für die Schachtelung zweier Loop-Schleifen:

`LOOP` x_2 `DO` x_0 `:=` $x_0 + x_1$ `END`

Man nutzt hier aus, dass x_0 Eingangs den Wert 0 hat.

Einige andere Programmkonstrukte typischer imperativer Programmiersprachen lassen sich mittels Loop-Schleifen simulieren. Wir betrachten zwei Beispiele:

- Absolute Wertzuweisungen: $x_i := c$ wird simuliert durch

  `LOOP` x_i `DO` x_i `:=` $x_i \dot{-} 1$ `END;`
  x_i `:=` $x_i + c$

- `IF` $x = 0$ `THEN` P `END` kann simuliert werden durch:

  y `:=` 1`;`
  `LOOP` x `DO` y `:=` 0 `END;`
  `LOOP` y `DO` P `END`

  wobei y eine neue Variable ist, die nicht in P vorkommt ist.

Im folgenden verwenden wir diese zusätzlichen Konstrukte sowie LOOP-berechenbare arithmetische Operationen o.B.d.A. direkt in LOOP-Programmen. Gemeint ist dann natürlich das LOOP-Programm, dass man durch Ersetzen der verwendeten Konstrukte und Operationen durch die definierenden LOOP-Programme erhält.

Beispiel: Die ganzzahlige Divisionsfunktion ist LOOP-berechenbar:

`LOOP` x_1 `DO`
  x_3 `:=` $x_3 + x_2$`;`
  `IF` $x_3 \cdot -x_1 = 0$ `THEN` $x_0 := x_0 + 1$ `END`
`END`

Man nutzt hier aus, dass sowohl x_0 als auch die Hilfsvariable x_3 eingangs den Wert 0 haben. Die Bedingung $x_3 - x_1 = 0$ verwenden wir zum Testen von $x_1 \geq x_3$. Letzteres könnte man also auch o.B.d.A. als Bedingung innerhalb des IF-Konstruktes zulassen.

Im Gegensatz zu Turing-Maschinen terminieren LOOP-Programme offensichtlich immer, da für jede Schleife eine feste Anzahl von Durchläufen durch den anfänglichen Wert der Schleifenvariablen festgelegt wird. Daher sind alle durch LOOP-Programme berechneten Funktionen total. Es folgt sofort, dass *nicht* jede Turing-berechenbare Funktion auch LOOP-berechenbar ist. Wie aber steht es mit der LOOP-berechenbarkeit totaler Funktionen? Das folgende Resultat zeigt, LOOP-Programme auch bezüglich solcher Funktionen nicht berechnungsvollständig sind.

Satz 13.3
Es gibt totale berechenbare Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Beweis. Wir definieren die Länge von LOOP-Programmen induktiv über deren Aufbau:

1) $|x_i \texttt{ := } x_j + c| := i + j + c + 1$
   $|x_i \texttt{ := } x_j \dot{-} c| := i + j + c + 1$
2) $|P\texttt{;}Q| := |P| + |Q| + 1$
3) $|\texttt{LOOP } x_i \texttt{ DO } P \texttt{ END}| := |P| + i + 1$

Für eine gegebene Länge n gibt es nur endlich viele LOOP-Programme dieser Länge: neben der Programmlänge ist mit obiger Definition auch die Menge der möglichen vorkommenden Variablen und Konstantensymbole beschränkt. Deshalb ist die folgende Funktion total:

$$\mathrm{f}(x, y) := 1 + \max\{\mathrm{g}(y) \mid \mathrm{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ wird von einem LOOP-Programm der Länge } x \text{ berechnet}\}$$

Behauptung 1:
Die Funktion

$$\mathrm{d} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } z \mapsto \mathrm{f}(z, z)$$

ist nicht LOOP-berechenbar, denn:

Sei P ein LOOP-Programm, das d berechnet und sei $n = |P|$.

Wir betrachten $\mathrm{d}(n) = \mathrm{f}(n, n)$. Nach Definition ist $\mathrm{f}(n, n)$ größer als jeder Funktionswert, den ein LOOP-Programm der Länge n bei Eingabe n berechnet. Dies widerspricht der Tatsache, dass d von P berechnet wird.

Behauptung 2:
Die Funktion d ist Turing-berechenbar, denn:

Bei Eingabe z kann eine TM die *endlich vielen* LOOP-Programme der Länge z aufzählen und jeweils auf die Eingabe z anwenden (wir werden später noch formal beweisen, dass

eine TM jedes LOOP-Programm simulieren kann). Da alle diese Aufrufe terminieren, kann man in endlicher Zeit den maximalen so erhaltenen Funktionswert berechnen (und dann um eins erhöhen). □

Die im Beweis von Satz 13.3 angegebene Funktion ist unter Bezugnahme auf LOOP-Programme definiert und daher eher technischer Natur. Eine prominente Funktion, die ebenfalls nicht durch LOOP-Programme berechenbar ist, deren Definition sich aber nicht auf LOOP-Programme bezieht, ist die sogenannte *Ackermannfunktion* A, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(0, y) &:= y + 1 \\ \mathrm{A}(x + 1, 0) &:= \mathrm{A}(x, 1) \\ \mathrm{A}(x + 1, y + 1) &:= \mathrm{A}(x, \mathrm{A}(x + 1, y)) \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um eine geschachtelte Induktion: in der letzten Zeile wird der Wert für das zweite Argument durch die Funktion selbst berechnet. Intuitiv ist diese Funktion wohldefiniert, da in jedem Schritt entweder das erste Argument verringert wird oder gleich bleibt, wobei dann aber das zweite Argument verringert wird. Ein formaler, induktiver Beweis der Wohldefiniertheit ist nicht schwierig.

Man kann leicht zeigen, dass A Turing-berechenbar ist (zum Beispiel, indem man die Definition von A direkt in eine rekursive Funktion in einer beliebigen Programmiersprache "übersetzt"). Der Beweis, dass A nicht LOOP-berechenbar ist, beruht auf einem ähnlichen Argument wie der Beweis von Satz 13.3: die Funktionswerte der Ackermannfunktion *wachsen schneller* als bei jeder LOOP-berechenbaren Funktion. Die Beweisdetails sind allerdings etwas technischer, siehe [Schö97].

WHILE-Programme

Wir erweitern LOOP-Programme nun um eine *While-Schleife* und erhalten so WHILE-Programme. Die While-Schleife unterscheidet sich von der Loop-Schleife dadurch, dass die Anzahl der Durchläufe nicht von Anfang an feststeht. Dieser Unterschied ist fundamental, denn im Gegensatz zu LOOP-Programmen stellen sich WHILE-Programme als berechnungsvollständig heraus. Intuitiv ist es also nicht möglich, eine berechnungsvollständige Programmiersprache allein auf For-Schleifen aufzubauen, wohingegen While-Schleifen ausreichend sind (wir werden noch sehen, dass sich For-Schleifen mittels While-Schleifen ausdrücken lassen).

Definition 13.4 (Syntax von WHILE-Programmen)
Die Syntax von WHILE-Programmen enthält alle Konstrukte in der Syntax von LOOP-Programmen und zusätzlich

4) Falls P ein WHILE-Programm ist und $i \geq 0$, so ist auch

$$\texttt{WHILE } x_i \neq 0 \texttt{ DO } P \texttt{ END} \qquad \textit{(While-Schleife)}$$

ein WHILE-Programm.

Die *Semantik* dieses Konstrukts ist wie folgt definiert:

- Das Programm P wird solange iteriert, bis x_i den Wert 0 erhält.
- Geschieht das nicht, so terminiert diese Schleife nicht.

Offensichtlich müssen WHILE-Programme im Gegensatz zu LOOP-Programmen nicht unbedingt terminieren. Man könnte bei der Definition der WHILE-Programme auf das LOOP-Konstrukt verzichten, da es durch WHILE simulierbar ist:

`LOOP` x `DO` P `END`

kann simuliert werden durch:

y `:=` $x + 0$`;`
`WHILE` $y \neq 0$ `DO` y `:=` $y \dot{-} 1$`;`P `END`

wobei y eine neue Variable ist.

Definition 13.5 (WHILE-berechenbar)

Eine (partielle) k-stellige Funktion $\mathrm{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *WHILE-berechenbar*, falls es ein WHILE-Programm P gibt, das f in dem folgenden Sinne berechnet:

- *Gestartet* mit $n_1, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ (und 0 in den restlichen Variablen)
- *stoppt* P mit dem Wert $\mathrm{f}(n_1, \ldots, n_k)$ in der Variablen x_0, falls dieser Wert definiert ist.
- Sonst stoppt P nicht.

Beispiel:

Die Funktion

$$\mathrm{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ mit } (x, y) \mapsto \begin{cases} x - y & \text{falls} \quad x \geq y \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist WHILE-berechenbar durch das folgende Programm:

```
WHILE x_2 ≠ 0 DO
  IF x_1 ≠ 0 THEN
    x_1 := x_1 ∸ 1;
    x_2 := x_2 ∸ 1;
  END
END;
x_0 := x_1
```

Satz 13.6

Jede WHILE-berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

Beweisskizze. Sei P ein WHILE-Programm, dass eine k-stellige Funktion berechnet. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Variablen $x_0, \ldots, x_k$ auch wirklich in P vorkommen. Wir zeigen per Induktion über den Aufbau von Q, dass es zu jedem Teilprogramm Q von P eine Mehrband-DTM T_Q gibt, die in folgendem Sinne Q entspricht:

- Wenn ℓ der maximale Index ist, so dass Q die Variable x_ℓ verwendet und die Bänder 1 bis $\ell+1$ von T_Q eingangs die Werte der Variablen $x_0, \ldots, x_\ell$ vor Ausführung des Teilprogrammes Q enthalten,
- dann terminiert T_Q gdw. das Teilprogramm Q auf den gegebenen Variablenwerten terminiert und
- wenn T_Q terminiert, dann finden sich danach auf den Bändern 1 bis $\ell+1$ die Werte der Variablen $x_0, \ldots, x_\ell$ nach Ausführung des Teilprogrammes Q.

Weitere Arbeitsbänder werden nicht verwendet. Die Induktion liefert schliesslich eine DTM T_P für P selbst. Man kann T_P nun leicht in eine DTM T umwandeln, die im Sinne von Definition 11.2 dieselbe Funktion wie P berechnet:

- Zunächst wird der Inhalt $w_1 \not b w_2 \not b \cdots \not b w_k$ des ersten Bandes gelesen und w_1 auf Band 2 geschrieben, w_2 auf Band 3, usw. Danach wird Band 1 gelöscht (entspricht der Initialisierung der Variablen x_0 mit 0).
- Nun wird T_P gestartet.
- Wenn T_P terminiert, wird der Schreib-Lesekopf auf Band 1 ganz an das linke Ende bewegt (denn die Ausgabe muss ja nach Definition 11.2 direkt beim Kopf beginnen).

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass in P alle Loop-Schleifen durch While-Schleifen ersetzt wurden. Die Konstruktion der DTMs T_Q ist nun wie folgt:

- Sei Q von der Form $x_i := x_j + c$ oder $x_i := x_j \dot{-} c$. Es ist leicht, die benötigten Turingmaschinen T_Q zu konstruieren.
- Sei Q von der Form $Q_1; Q_2$. Man erhält die Maschine T_Q durch Hintereinanderausführung von T_{Q_1} und T_{Q_2}.
- Sei Q von der Form `WHILE` $x_i \neq 0$ `DO` Q' `END`. Die Turingmaschine T_Q prüft zunächst, ob Band $i+1$ leer ist (was $x_i = 0$ entspricht). Ist dies der Fall, so terminiert T_Q. Andernfalls wird $T_{Q'}$ gestartet und danach von vorn begonnen.

□

Satz 13.7

Jede Turing-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.

Beweisskizze. Um diesen Satz zu beweisen, kodieren wir Konfigurationen von Turingmaschinen, dargestellt als Wörter der Form

$$\alpha q \beta \text{ für } \alpha, \beta \in \Gamma^* \text{ und } q \in Q,$$

in drei natürliche Zahlen.

Diese werden dann in den drei Programmvariablen x_1, x_2, x_3 des WHILE-Programms gespeichert:

- x_1 repräsentiert α,
- x_2 repräsentiert q,
- x_3 repräsentiert β.

Es sei o.B.d.A. $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $Q = \{q_0, \ldots, q_k\}$ mit q_0 Startzustand, d.h. wir können Alphabetssymbole und Zustände über ihren Index als natürliche Zahl beschreiben.

Die Konfiguration

$$a_{i_1} \ldots a_{i_l} q_m a_{j_1} \ldots a_{j_r}$$

wird dargestellt als

$$\begin{aligned} x_1 &= (i_1, \ldots, i_l)_b && := \sum_{\nu=1}^{l} i_\nu \cdot b^{l-\nu} \\ x_2 &= m \\ x_3 &= (j_r, \ldots, j_1)_b && := \sum_{\rho=1}^{r} j_\rho \cdot b^{\rho-1}, \end{aligned}$$

wobei $b = |\Gamma| + 1$ ist, d.h.

- $a_{i_1} \ldots a_{i_l}$ repräsentiert x_1 in b-ärer Zahlendarstellung und
- $a_{j_r} \ldots a_{j_1}$ (Reihenfolge!) repräsentiert x_3 in b-ärer Zahlendarstellung.

Ist beispielsweise $b = |\Gamma| = 10$, also $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_9\}$, so wird die Konfiguration

$$a_4 a_2 a_7 a_1 \, q_3 \, a_1 a_8 a_3 \quad \text{dargestellt durch} \quad x_1 = 4271,\ x_2 = 3,\ x_3 = 381.$$

Wir brauchen $b = |\Gamma| + 1$ statt $b = |\Gamma|$, da wir die Ziffer 0 nicht verwenden können: die unterschiedlichen Strings a_0 und $a_0 a_0$ hätten die Kodierungen 0 und 00, also dieselbe Zahl.

Die elementaren Operationen auf Konfigurationen, die zur Implementierung von Berechnungsschritten der simulierten TM benötigt werden, lassen sich mittels einfacher arithmetischer Operationen realisieren:

Herauslesen des aktuellen Symbols a_{j_1}
: Ist $x_3 = (j_r, \ldots, j_1)_b$, so ist $j_1 = x_3 \bmod b$.

Ändern dieses Symbols zu a_j
: Der neue Wert von x_3 ist $(j_r, \ldots, j_2, j)_b = \mathrm{div}((j_r, \ldots, j_2, j_1)_b, b) \cdot b + j$

Verschieben des Schreib-Lesekopfes
: kann durch ähnliche arithmetische Operationen realisiert werden.

All diese Operationen sind offensichtlich WHILE-berechenbar (sogar LOOP!).

Das WHILE-Programm, welches die gegebene DTM simuliert, arbeitet wie folgt:

1) Aus der Eingabe wird die Kodierung der Startkonfiguration der DTM in den Variablen x_1, x_2, x_3 erzeugt.

   Wenn also beispielsweise eine binäre Funktion berechnet werden soll und die Eingabe $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ ist, so muß die Startkonfiguration $q_0aaa\not baaaaa$ erzeugt werden, repräsentiert durch $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 111112111$ wenn $a_1 = a$ und $a_2 = \not b$.

2) In einer WHILE-Schleife wird bei jedem Durchlauf ein Schritt der TM-Berechnung simuliert (wie oben angedeutet)

   - In Abhängigkeit vom aktuellen Zustand (Wert von x_2) und
   - dem gelesenen Symbol, d.h. von x_3 mod b
   - wird mit den oben dargestellten arithmetischer Operationen das aktuelle Symbol verändert und
   - der Schreib-Lesekopf bewegt.

   Die WHILE-Schleife terminiert, wenn der aktuelle Zustand zusammen mit dem gelesenen Symbol keinen Nachfolgezustand hat.

   All dies ist durch einfache (WHILE-berechenbare) arithmetische Operationen realisierbar.

3) Aus dem Wert von x_3 nach Terminierung der WHILE-Schleife wird der Ausgabewert herausgelesen und in die Variable x_0 geschrieben.

   Dazu braucht man eine weitere WHILE-Schleife: starte mit $x_0 = 0$; extrahiere wiederholt Symbole aus x_3; solange es sich dabei um a handelt, inkrementiere x_0; sobald ein anderes Symbol gefunden wird oder x_3 erschöpft ist, gib den Wert von x_0 zurück. □

14. Primitiv rekursive Funktionen und μ-rekursive Funktionen

Sowohl die LOOP-berechenbaren Funktionen als auch die WHILE-berechenbaren Funktionen lassen sich auch auf gänzlich andere Weise definieren, wobei nicht der Mechanismus der Berechnung, sondern die Funktion selbst in den Mittelpunkt gestellt wird. Genauer gesagt betrachten wir die Klasse der sogenannten primitiv rekursiven Funktionen, die sich als identisch zu den LOOP-berechenbaren Funktionen herausstellen, und die Klasse der μ-rekursiven Funktionen, die sich als identisch zu den WHILE-berechenbaren Funktionen herausstellen. Beide Klassen waren historisch unter den ersten betrachteten Berechnungsmodellen und spielen in der Theorie der Berechenbarkeit und der Komplexitätstheorie noch heute eine wichtige Rolle. Insbesondere kann man sie als mathematisches Modell von funktionalen Programmiersprachen auffassen. Auch in diesem Kapitel betrachten wir ausschliesslich k-stellige Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Primitiv Rekursive Funktionen

Die Klasse der *primitiv rekursiven Funktionen* besteht aus den Funktionen, die man aus den folgenden *Grundfunktionen* durch Anwenden der folgenden Operationen erhält.

Grundfunktionen:

1. Konstante Nullfunktionen null_k beliebiger Stelligkeit $k \geq 0$, also z.B. die dreistellige Funktion null_3 mit $\text{null}_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ für alle x_1, x_2, x_3.
2. Projektionsfunktionen $\text{proj}_{k\to i}$ beliebiger Stelligkeit k auf das i-te Argument, $1 \leq i \leq k$, z.B. die dreistellige Funktion $\text{proj}_{3\to 1}$ für die Projektion auf das erste Argument, also $\text{proj}_{3\to 1}(x_1, x_2, x_3) = x_1$ für alle x_1, x_2, x_3.
3. Die einstellige Nachfolgerfunktion succ.

Operationen:

1. Komposition (Einsetzung) von Funktionen.

   Genauer gesagt entsteht eine k-stellige Funktion f aus k-stelligen Funktionen $h_1, \ldots, h_n$ unter Anwendung eine n-stelligen Funktion g wenn

   $$f(x_1, \ldots, x_k) = g(h_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_k))$$

2. Primitive Rekursion.

   Primitive Rekursion bedeutet hier einen rekursiven Abstieg über das erste Funktionsargument, also darf $f(n + 1, \ldots)$ definiert werden unter Verwendung von $f(n, \ldots)$. Um das etwas präziser zu machen sei g eine k-stellige Funktion und

h eine $k+2$-stellige Funktion. Dann entsteht die $k+1$-stellige Funktion f per primitiver Rekursion aus g und h wenn

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \ldots, x_k) &= g(x_1, \ldots, x_k) \\ f(n+1, x_1, \ldots, x_k) &= h(n, f(n, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

Die Funktion g definiert also den Rekursionsanfang und h den Rekursionsschritt. Bei der Berechnung des Funktionswertes im Rekursionsschritt hat man zur Verfügung: alle Argumente inklusive Rekursionsargument sowie den per rekursivem Aufruf ermittelten Wert.

Beispiel 14.1

Addition kann durch primitive Rekursion wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(0, y) = y &= \mathrm{g}(y) \\ \mathrm{add}(x+1, y) = \mathrm{add}(x, y) + 1 &= \mathrm{h}(x, \mathrm{add}(x, y), y) \end{aligned}$$

Das heißt also: add entsteht durch primitive Rekursion aus den Funktionen

- $g(x) = \mathrm{proj}_{1\to 1}(x)$, also die Identitätsfunktion als triviale Projektion;
- $h(x, z, y) = \mathrm{succ}(\mathrm{proj}_{3\to 2}(x, z, y))$.

Multiplikation erhält man durch primitive Rekursion aus der Addition:

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}(0, y) &= 0 && \text{mit } g(y) = \mathrm{null}_1(y) \\ \mathrm{mult}(x+1, y) &= \mathrm{add}(\mathrm{mult}(x, y), y) && \text{mit } h(x, z, y) = \mathrm{add}(\mathrm{proj}_{3\to 2}(x, z, y), \mathrm{proj}_{3\to 3}(x, z, y)) \end{aligned}$$

Exponentiation erhält man durch primitive Rekursion aus der Multiplikation:

$$\begin{aligned} \exp(0, y) &= 1 \\ \exp(x+1, y) &= \mathrm{mult}(\exp(x, y), y) \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Exponentiation y^x. Wenn gewünscht, kann man draus leicht mittels Projektion die Exponentiation x^y konstruieren.

Man zeigt leicht per Induktion über den Aufbau primitiv rekursiver Funktionen, dass jede primitiv rekursive Funktion *total* ist. Es gilt der folgende Satz.

Satz 14.2

Die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen stimmt mit der Klasse der LOOP-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis.

(I) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind LOOP-berechenbar. Wir zeigen dies per Induktion über den Aufbau der primitiv rekursiven Funktionen:

- Für die *Grundfunktionen* ist klar, dass sie LOOP-berechenbar sind.

- Komposition:

  $$\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{g}(\mathrm{h}_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_k))$$

  Es seien $P_1, \ldots, P_m, P$ LOOP-Programme für $\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_m, \mathrm{g}$.

  Durch Speichern der Eingabewerte und der Zwischenergebnisse in unbenutzten Variablen kann man zunächst die Werte von $\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_m$ mittels $P_1, \ldots, P_m$ berechnen und dann auf diese Werte P anwenden. Genauer:

  y_1 := x_1; $\cdots$; y_n := x_n;
  Führe P_1 aus
  z_1 := x_0;
  x_i := 0; für alle in P_1 verwendeten Variablen x_i
  x_1 := y_1; $\cdots$; x_n := y_n;
  Führe P_2 aus
  $\vdots$
  z_m := x_m;
  x_i := 0; für alle in P_m verwendeten Variablen x_i
  x_1 := z_1; $\cdots$; x_m := z_m;
  Führe P aus

- primitive Rekursion:

  $$\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{g}(x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{falls } x_1 = 0$$
  $$\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{h}(x_1 - 1, \mathrm{f}(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{falls } x_1 > 0$$

  Die Funktion f kann durch das LOOP-Programm

  z_1 := 0;
  z_2 := $\mathrm{g}(x_2, \ldots, x_n)$; $(\star)$
  LOOP x_1 DO
  z_2 := $\mathrm{h}(z_1, z_2, x_2, \ldots, x_n)$; $(\star)$
  z_1 := $z_1 + 1$
  END
  $x_0 := z_2$

  berechnet werden.

  Dabei sind die mit $(\star)$ gekennzeichneten Anweisungen Abkürzungen für Programme, welche Ein- und Ausgaben geeignet kopieren und die Programme für g und h anwenden.

  Die Variablen z_1, z_2 sind neue Variablen, die in den Programmen für g und h *nicht* vorkommen.

(II) Alle LOOP-berechenbaren Funktionen sind primitiv rekursiv.

Da der Beweis technisch etwas aufwendiger ist, beschränken wir uns auf eine Skizze. Für ein gegebenes LOOP-Programm P zeigt man per Induktion über die Teilprogramme von P, dass es zu jedem Teilprogramm Q von P eine „äquivalente"' primitiv rekursive Funktion gibt.

Leider ist es nicht ausreichend, „äquivalent"' als „liefert dieselbe Ausgabe/denselben Funktionswert"' zu interpretieren, da P zusätzliche Hilfsvariablen verwenden kann, deren Werte zwischen den Teilprogrammen von P weitergegeben werden (siehe Beweis von Satz 13.6). Ein adäquater Äquivalenzbegriff muss darum die Ein- und Ausgabewerte *aller* in P verwendeten Variablen $x_0, \ldots, x_n$ berücksichtigen.

Da aber jede primitiv rekursive Funktion nur einen einzelnen Funktionswert zurückliefert und so etwas wie „Hilfsvariablen" nicht zur Verfügung steht, ist es notwendig, n Variablenwerte als eine einzige Zahl zu kodieren.

Wir benötigen also eine primitiv rekursive Bijektion

$$\mathrm{c}^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \quad (n \geq 2)$$

sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen

$$\mathrm{c}_0^{(n)}, \ldots, \mathrm{c}_{n-1}^{(n)}.$$

Für $n = 2$ kann man beispielsweise die folgende Funktion verwenden:

$$\mathrm{c}^{(2)} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ mit } (x, y) \mapsto 2^x \cdot (2y + 1) \dot{-} 1$$

sowie ihre Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{c}_0^{(2)}(z) &= \max\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x | (z+1)\} \\ \mathrm{c}_1^{(2)}(z) &= ((\frac{z+1}{2^{\mathrm{c}_0^{(2)}(z)}}) \dot{-} 1)/2 \end{aligned}$$

wobei $x|y$ für Teilbarkeit steht, also $x|y = 1$ wenn x durch y ganzzahlig teilbar ist und $x|y = 0$ sonst. Man kann zeigen, dass $\mathrm{c}^{(2)}$ in der Tat eine Bijektion ist und dass sowohl $\mathrm{c}^{(2)}$ als auch die Umkehrfunktionen primitiv rekursiv sind. Durch wiederholtes Anwenden erweitert man $\mathrm{c}^{(2)}$ leicht auf die gewünschte Bijektion $\mathrm{c}^{(n)}$.

Man übersetzt nun jedes Teilprogramm Q von P in eine *einstellige* primitiv rekursive Funktion, indem man die Komposition folgender Schritte bildet: 1) aus dem Eingabewert die Werte aller Variablen dekodieren; 2) Q simulieren; und 3) alle Variablenwerte wieder in einen einzigen Wert kodieren.

□

μ-rekursive Funktionen

Aus Satz 14.2 folgt natürlich, dass die primitiv rekursiven Funktionen nicht berechnungsvollständig sind. In diesem Abschnitt erweitern wir die primitiv rekursiven Funktionen zu den μ-rekursiven Funktionen. Dieser Schritt entspricht dem Übergang von LOOP-Programmen zu WHILE-Programmen und liefert insbesondere Berechnungsvollständigkeit.

Die Erweiterung der primitiv rekursiven Funktionen wird durch Hinzunahme des sogenannten μ-Operators erreicht. Die durch diesen Operator beschriebene Operation wird auch als *Minimalisierung* bezeichnet. Intuitiv ist das erste Argument einer k-stelligen Funktion g als Minimalisierungsargument festgelegt und das Resultat der Minimalisierung von g ist das kleinste x so dass $g(x, \dots) = 0$. So ein x muß natürlich nicht existieren, so dass sich mit dem μ-Operator auch echt partielle Funktionen definieren lassen. Die Semantik von Komposition und primitiver Rekursion lässt sich leicht auf partielle Funktionen erweitern. Zum Beispiel ist die Komposition $\mathrm{f}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{g}(\mathrm{h}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \mathrm{h}_m(x_1, \dots, x_n))$ undefiniert wenn

- eines der $\mathrm{h}_i(x_1, \dots, x_n)$ *undefiniert* ist oder
- alle h_i-Werte *definiert* sind, aber g von diesen Werten *undefiniert* ist.

Auch bei primitiver Rekursion setzen sich undefinierte Werte fort.

Wir wollen nun den μ-Operator formaler definieren. Eine k-stellige Funktion f entsteht aus einer $k{+}1$-stelligen Funktion g *durch Anwendung des* μ-Operators (wir bezeichnen f dann mit μg) wenn

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) \quad = \quad & \min\{n \mid g(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ und} \\ & \qquad g(m, x_1, \dots, x_k) \text{ ist definiert für alle } m < n\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\min \emptyset$ undefiniert. Man beachte, dass das Ergebnis der Minimalisierung also in zwei Fällen undefiniert ist: (i) wenn kein n existiert, so dass $g(n, x_1, \dots, x_k) = 0$ gilt und (ii) wenn für das kleinste n mit $g(n, x_1, \dots, x_k) = 0$ gilt: es gibt ein m mit $0 \leq m < n$ und $g(m, x_1, \dots, x_k)$ undefiniert.

Beispiel 14.3

- Die 1-stellige, überall undefinierte Funktion undef kann definiert werden als

  $$\mathrm{undef}(x) = \mu g(x) \text{ mit } g(y, x) = \mathrm{succ}(y).$$

  $\mu g(x)$ liefert also unabhängig von der Eingabe x das kleinste y, so dass $y + 1 = 0$; so ein y existiert aber offensichtlich nicht.

- Um die Funktion

  $$\mathrm{div}(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{falls } x/y \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

  als μ-rekursive Funktion zu definieren, überlegt man sich zunächst leicht, dass die symmetrische Differenz $\mathrm{sdiff}(x, y) = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$ primitiv rekursiv ist. Dann definiert man

  $$\mathrm{div}(x, y) = \mu g(x, y) \text{ mit } g(z, x, y) = \mathrm{sdiff}(x, \mathrm{mult}(z, y)).$$

  $\mu g(x, y)$ liefert also das kleinste z, so dass die symmetrische Differenz zwischen x und $z \cdot y$ gleich 0 ist. Offensichtlich ist z genau der gesuchte Teiler bzw. undefiniert wenn dieser in $\mathbb{N}$ nicht existiert.

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen besteht aus den Funktionen, die man aus den primitiv rekursiven Grundfunktionen durch Anwenden von Komposition, primitiver Rekursion und des μ-Operators erhält.

Satz 14.4

Die Klasse der μ-rekursiven Funktionen stimmt mit der Klasse der WHILE-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis. Wir müssen hierzu den Beweis von Satz 14.2 um die Behandlung des zusätzlichen μ-Operators/WHILE-Konstrukts ergänzen. Wir beschränken uns dabei auf den Nachweis, dass alle μ-rekursiven Funktionen auch WHILE-berechenbar sind.

Es sei f $= \mu$g und P (nach Induktionsvoraussetzung) ein WHILE-Programm für g. Dann berechnet das folgende Programm die Funktion f:

x_0 `:=` 0`;`
y `:=` g$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$`;` (realisierbar mittels P)
`WHILE` $y \neq 0$ `DO`
  x_0 `:=` $x_0 + 1$`;`
  y `:=` g$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$`;` (realisierbar mittels P)
`END`

Dieses Programm terminiert nicht, wenn eine der Berechnung der Funktion g mittels des Programmes P nicht terminiert oder wenn y in der WHILE-Schleife niemals den Wert 0 annimmt. In beiden Fällen ist nach Definition von unbeschränkter Minimalisierung aber auch der Wert von μg nicht definiert.

□

Satz 14.4 liefert einen weiteren Anhaltspunkt für die Gültigkeit der Church-Turing These.

15. Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit

Wir wechseln nun von den Funktionen und dem mit Ihnen verknüpften Berechenbarkeitsbegriff zu Entscheidungsproblemen und den damit assoziierten Begriffen Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit. In diesem Kapitel führen wir diese Begriffe formal ein und lernen dann einige grundlegende Zusammenhänge zwischen ihnenkennen. Wir verwenden hier wieder Turing-Maschinen als zugrundeliegendes Berechnungsmodell, begründet durch die Church-Turing-These und die in den vorhergehenden Abschnitten dargestellte Äquivalenz zu anderen konkreten Berechnungsmodellen.

In der Informatik erfordern viele Probleme nur eine ja/nein Antwort anstelle eines "echten" Funktionswertes, z.B.:

- Das Leerheitsproblem für NEAs: gegeben ein NEA $\mathcal{A}$, ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
- Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken: gegeben eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort, ist $w \in L(G)$?
- Das Äquivalenzproblem für kontextsensitive Grammatiken: gegeben kontextsensitive Grammatiken G_1 und G_2, gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- etc

Derartige Probleme nennen wir Entscheidungsprobleme. Wir formalisieren sie nicht als Funktionen, sondern als formale Menge von Wörtern über einem geeigneten Alphabet Σ, also als formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Das assoziierte ja/nein-Problem ist dann einfach: ist ein gegebenes Wort $w \in \Sigma^*$ enthalten in L?

Als Beispiel für die Formalisierung eines Entscheidungsproblems als formale Sprache betrachten wir das *Äquivalenzproblem* für kontextsensitive Sprachen. Jede Grammatik $G = (N, \Gamma, P, S)$ kann als Wort $\text{code}(G) \in \Gamma^*$ über einem festen (d.h. nicht von G abhängigen) Alphabet Σ aufgefasst werden. Das Äquivalenzproblen für Typ 1-Sprachen ist dann die Sprache

$$\{(\text{code}(G_1)\#\text{code}(G_2)) \mid G_1, G_2 \text{ kontextsensitiv}, L(G_1) = L(G_2)\} \subseteq \Sigma^*,$$

wobei # einfach ein Trennsymbol ist, dass es erlaubt, die beiden Eingaben zu unterscheiden.

Definition 15.1 (entscheidbar, semi-entscheidbar, rekursiv aufzählbar)
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt

1) *entscheidbar*, falls es eine DTM gibt, die bei Eingabe $w \in \Sigma^*$
   - in akzeptierender Stoppkonfiguration anhält wenn $w \in L$
   - in nicht-akzeptierender Stoppkonfiguration anhält wenn $w \notin L$

   Wenn er keine solte DTM gibt, hießt L *unentscheidbar*.

2) *semi-entscheidbar*, falls es eine DTM gibt, die bei Eingabe $w \in \Sigma^*$
   - terminiert, falls $w \in L$ ist
   - nicht terminiert sonst.

3) *rekursiv aufzählbar*, falls L von einer Aufzähl-Turingmaschine aufgezählt wird. Diese ist wie folgt definiert:

   Eine *Aufzähl-Turingmaschine* $\mathcal{A}$ ist eine DTM, die einen speziellen Ausgabezustand q_{Ausgabe} hat.

   Eine *Ausgabekonfiguration* ist von der Form

   $$uq_{\text{Ausgabe}}\, wav \text{ mit } u, v \in \Gamma^*, w \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Gamma \setminus \Sigma.$$

   Diese Konfiguration hat w als *Ausgabe*.

   Die durch $\mathcal{A}$ *aufgezählte Relation* ist

   $$R = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist Ausgabe einer Ausgabekonfiguration, die von } \mathcal{A} \text{ ausgehend von Startkonfiguration } q_0 \not b \text{ erreicht wird}\}.$$

Entscheidbarkeit entspricht der intuitiven Existenz eines Algorithmus, der das Entscheidungsproblem (in endlicher Zeit) löst. In der Tat haben wir bereits zahlreiche Entscheidbarkeitsbeweise geführt (z.B. für das Wortproblem für NEAs), wobei wir jedoch einen intuitiven Berechenbarkeitsbegriff anstatt TMs verwendet haben. Eine DTM, die eine Sprache L entscheidet, nennen wir ein *Entscheidungsverfahren* für L. Analog sprechen wir auch von *Semi-Entscheidungsverfahren*. Beachte, dass ein Entscheidungsverfahren immer terminiert, ein Semi-Entscheidungsverfahren jedoch nicht notwendigerweise. Bei Semi-Entscheidungsverfahren ist Terminierung ja sogar die verwendete Akzeptanzbedingung. Beachte auch, dass eine Aufzähl-TM dasselbe Wort mehrfach aufzählen kann.

Bemerkung 15.2.

1) Entscheidbarkeit kann als Spezialfall der Berechenbarkeit *totaler* Funktionen gesehen werden: eine Sprache L ist entscheidbar g.d.w. ihre *charakteristische Funktion*, also die totale Funktion χ_L, definiert durch

   $$\chi_L(w) := \begin{cases} a & \text{wenn } w \in L \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

   berechenbar ist.

2) Man sieht leicht: eine Sprache L ist semi-entscheidbar gdw. L der Definitionsbereich einer einstelligen berechenbaren *partiellen* Funktion ist.

3) Eine Sprache L ist semi-entscheidbar gdw. sie Turing-erkennbar ist:

   - Turing-erkennbar $\Rightarrow$ semi-entscheidbar

     Wir können mit Satz 11.6 o.B.d.A. annehmen, dass es eine DTM $\mathcal{A}$ gibt, die L erkennt. Bei $w \notin L$ kann $\mathcal{A}$ in nicht-Endzustand halten, wohingegen ein Semi-Entscheidungsverfahren nicht terminieren darf.

     Modifikation: wenn $\mathcal{A}$ bei $w \notin L$ in nicht-Endzustand anhält, dann gehe in Endlosschleife.

   - semi-entscheidbar $\Rightarrow$ Turing-erkennbar

     Semi-Entscheidungsverfahren $\mathcal{A}$ für L kann bei $w \in L$ in beliebigem Zustand anhalten, wohingegen es bei Turing-Erkennbarkeit ein Endzustand sein muß.

     Modifikation: wenn $\mathcal{A}$ bei $w \in L$ in nicht-Endzustand anhält, dann wechsle in einem Schritt in Endzustand (der keine Folgezustände hat).

Es bestehen sehr enge Zusammenhänge zwischen den in Definition 15.1 eingeführten Begriffen. So stellen sich rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit als äquivalent heraus und eine Sprache L ist entscheidbar gdw. L und das Komplement von L semi-entscheidbar sind.

Satz 15.3
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$.

1) L ist rekursiv aufzählbar gdw. L ist semi-entscheidbar.

2) Ist L entscheidbar, so auch semi-entscheidbar.

3) Ist L entscheidbar, so ist auch das Komplement $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ entscheidbar.

4) L ist entscheidbar gdw. L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar sind.

Beweis.

1) „⇒“: Es sei L rekursiv aufzählbar und $\mathcal{A}$ eine Aufzähl-DTM für L. Die Maschine $\mathcal{A}'$, die ein Semi-Entscheidungsverfahren für L ist, arbeitet wie folgt:

   - Sie speichert die Eingabe w auf zusätzliches Band
   - Sie beginnt mit der Aufzählung von L.
   - Bei jeder Ausgabekonfiguration überprüft sie, ob die entsprechende Ausgabe mit w übereinstimmt. Wenn ja, so terminiert $\mathcal{A}'$. Sonst sucht sie die nächste Ausgabekonfiguration von $\mathcal{A}$.
   - Terminiert $\mathcal{A}$, ohne dass w ausgegeben wurde, so gehe in Endlosschleife.

   $\mathcal{A}'$ terminiert daher genau dann nicht, wenn w nicht in der Aufzählung vorkommt.

„⇐“: Es sei $\mathcal{A}$ ein Semi-Entscheidungsverfahren für L und

$$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$$

Die Maschine $\mathcal{A}'$ arbeitet wie folgt:

1) Führe einen Schritt der Berechnung von $\mathcal{A}$ auf Eingabe w_1 aus
2) Führe zwei Schritte der Berechnung von $\mathcal{A}$ auf Eingaben w_1 und w_2 aus
   ⋮
n) Führe n Schritte der Berechnung von $\mathcal{A}$ auf Eingaben $w_1, \ldots, w_n$ aus
   ⋮

Terminiert $\mathcal{A}$ für eine dieser Eingaben, so gebe diese Eingabe aus und mache weiter.

Beachte:
Man kann nicht $\mathcal{A}$ zunächst auf Eingabe w_1 zu Ende laufen lassen, da $\mathcal{A}$ auf w_1 nicht terminieren muss.

2) Eine DTM $\mathcal{A}$, die L entscheidet, wird wie folgt modifiziert:
   - hält $\mathcal{A}$ in nicht-akzeptierender Stoppkonfiguration, so gehe in Endlosschleife.
   - keine Änderung, wenn $\mathcal{A}$ in akzeptierender Stoppkonfiguration stoppt.
3) Eine DTM $\mathcal{A}$, die L berechnet, wird wie folgt zu einer DTM für $\overline{L}$ modifiziert:
   - setze $F = Q \setminus F$ (tausche Endzustände und nicht-Endzustände)

   Diese Konstruktion liefert das gewünschte Resultat, weil $\mathcal{A}$ deterministisch ist und auf jeder Eingabe terminiert.
4) „⇒“: Ergibt sich aus 2) und 3).

   „⇐“: Sind L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar, so mit 1) auch rekursiv aufzählbar.

   Für Eingabe w lässt man die Aufzähl-DTMs $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ für L und $\overline{L}$ parallel laufen (d.h. jeweils abwechselnd ein Schritt von $\mathcal{A}$ auf einem Band gefolgt von einem Schritt von $\mathcal{A}'$ auf dem anderen).

   Die Eingabe w kommt in einer der beiden Aufzählungen vor:

$$w \in \Sigma^* = L \cup \overline{L}$$

   Kommt w bei $\mathcal{A}$ vor, so erzeuge Ausgabe a, sonst Ausgabe ε.

□

16. Universelle Maschinen und unentscheidbare Probleme

Wir beweisen das fundamentale Resultat, dass es Probleme gibt, die nicht entscheidbar sind. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist eine *universelle Turingmaschine*, die wie ein Interpreter für Programmiersprachen funktioniert und damit *jede* Turingmaschine simulieren kann. Die universelle Maschine erhält als Eingabe

- eine Beschreibung der zu simulierenden Turingmaschine $\mathcal{A}$;
- das Eingabewort w, auf dem $\mathcal{A}$ simuliert werden soll.

Sie akzeptiert ihre Eingabe gdw. w von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird. Wie jede andere Turingmaschine bekommt auch die universelle TM ein Wort als Eingabe. Um Turingmaschinen als Eingabe verwenden zu können, ist es also wichtig, diese als Wörter zu kodieren.

Konventionen:

- *Arbeitsalphabete* der betrachteten Turingmaschinen sind endliche Teilmengen von $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, wobei wir der Lesbarkeit halber an Stelle von a_1 meist a schreiben, an Stelle von a_2 schreiben wir b, und an Stelle von a_3 schreiben wir $\not b$.
- *Zustandsmengen* sind endliche Teilmengen von $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$, wobei q_1 stets der *Anfangszustand* ist.

Definition 16.1 (Kodierung einer Turingmaschine)
Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_1, \Delta, F)$ eine Turingmaschine, die o.B.d.A. die obigen Konventionen erfüllt.

1) Eine *Transition*

$$t = (q_i, a_j, a_{j'}, \begin{matrix} l \\ r \\ n \end{matrix}, q_{i'})$$

wird *kodiert* durch

$$\mathrm{code}(t) = a^i b a^j b a^{j'} b \begin{matrix} a \\ aa \\ aaa \end{matrix} b a^{i'} bb.$$

2) Besteht Δ aus den Transitionen $t_1, \ldots, t_k$ und ist $F = \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}\}$, so wird $\mathcal{A}$ *kodiert* durch

$$\mathrm{code}(\mathcal{A}) = \mathrm{code}(t_1) \ldots \mathrm{code}(t_k) b a^{i_1} b \ldots b a^{i_r} bbb.$$

Beachte, dass die einzelnen Transitionen durch *bb* getrennt sind, die Kodierung der Übergangsrelation durch *bbb* abgeschlossen wird und die Gesamtkodierung der TM durch den zweiten Block *bbb* gekennzeichnet ist.

Bemerkung 16.2.

1) Wir werden als Eingabe für die universelle TM Wörter der Form $x = \text{code}(\mathcal{A})w$ mit $w \in \Sigma^*$ verwenden; die Eingabe w für $\mathcal{A}$ findet man leicht nach dem zweiten Block *bbb*.
2) Es gibt eine DTM $\mathcal{A}_{CODE}$, welche die Sprache

$$CODE = \{\text{code}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ ist DTM über } \Sigma\}$$

entscheidet, denn:

- Überprüfe bei Eingabe w zunächst, ob w eine Turingmaschine kodiert (d.h. eine Folge von Transitionskodierungen gefolgt von einer Endzustandsmengenkodierung ist).
- Überprüfe dann, ob die kodierte Turingmaschine deterministisch ist (bei jeder Transition wird nachgeschaut, ob es eine andere mit demselben Anfangsteil gibt).

Die pure Existenz einer Kodierung von Turingmaschinen als Wörter ist bereits eine interessante Tatsache. Man erhält beispielsweise unmittelbar, dass es nur abzählbar viele Turingmaschinen gibt. Analog zu Cantors Beweis, dass es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, kann man beweisen, dass es überabzählbar viele verschiedene Sprachen gibt. Hieraus folgt natürlich sofort die Existenz unentscheidbarer Sprachen. Wir wollen im Folgenden aber einen konstruktiveren Beweis führen, der sich zudem auf eine Sprache bezieht, die zwar unentscheidbar, aber trotzdem noch semi-entscheidbar ist. Wir konstruieren dazu zunächst wie angekündigt eine universelle Turingmaschine.

Satz 16.3 (Turing)
Es gibt eine universelle DTM $\mathcal{U}$ über Σ, d.h. eine DTM mit der folgenden Eigenschaft: Für alle DTM $\mathcal{A}$ und alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathcal{U} \textit{ akzeptiert } \text{code}(\mathcal{A})w \quad \underline{gdw}. \quad \mathcal{A} \textit{ akzeptiert } w.$$

Es ist also $\mathcal{U}$ ein „Turing-Interpreter für Turingmaschinen“.

Beweis. $\mathcal{U}$ führt bei Eingabe $\text{code}(\mathcal{A})w$ die $\mathcal{A}$-Berechnung

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} \dots$$

in kodierter Form aus, d.h. $\mathcal{U}$ erzeugt sukzessive Bandbeschriftungen

$$\text{code}(\mathcal{A})\text{code}(k_0),\ \text{code}(\mathcal{A})\text{code}(k_1),\ \text{code}(\mathcal{A})\text{code}(k_2),\ \dots$$

Wir brauchen also noch eine *Kodierung von Konfigurationen als Wörter*:

$$\text{code}(a_{i_1} \dots a_{i_l} q_j a_{i_{l+1}} \dots a_{i_r}) = a^{i_1} b \dots a^{i_l} b a^j b b a^{i_{l+1}} b \dots a^{i_r} b$$

Beachte, dass die Kopfposition durch *bb* gekennzeichnet ist.

Arbeitsweise von $\mathcal{U}$ bei Eingabe $\text{code}(\mathcal{A})w$:

- Erzeuge aus code($\mathcal{A}$)w die Kodierung der Anfangskonfiguration

$$\text{code}(\mathcal{A})\text{code}(\underbrace{q_1 w}_{k_0}).$$

- Simuliere die Schritte von $\mathcal{A}$, ausgehend vom jeweiligen Konfigurationskode

$$\ldots ba^j bba^i b \ldots \text{ (Zustand } q_j\text{, gelesenes Symbol } a_i\text{)}.$$

  - Suche eine Transitionskodierung code(t), die mit $a^j ba^i$ beginnt.
  - Falls es so eine gibt, Änderungen der Konfigurationskodierung entsprechend t.
  - Sonst geht $\mathcal{U}$ in Stoppzustand. Dieser ist akzeptierend gdw. a^j in der Kodierung der Endzustandsmenge vorkommt.

  Es ist nicht schwer, das im Detail auszuarbeiten. Beachte allerdings, dass jede dieser Aufgaben viele Einzelschritte erfordert. Um z.B. ein code(t) zu finden, das mit $a^j ba^i$ beginnt, muss man die aktuelle Konfiguration sukzessive mit *jeder* Transitionskodierung vergleichen. Jeder einzelne solche Vergleich erfordert wiederholtes Hin- und Herlaufen zwischen der aktuellen Konfiguration und dem gerade betrachteten code(t) (Vergleich Symbol für Symbol).

□

Wir führen nun den angekündigten Unentscheidbarkeitsbeweis.

Satz 16.4
Die Sprache

$$UNIV = \{\text{code}(\mathcal{A})w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \textit{ ist DTM über } \Sigma,\ \textit{die } w \textit{ akzeptiert}\}$$

ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Beweis.

1) Bei Eingabe x geht die DTM, welche ein Semi-Entscheidungsverfahren für $UNIV$ ist, wie folgt vor:
   - Teste, ob x von der Form $x = x_1 w$ ist mit

$$x_1 \in CODE \text{ und } w \in \Sigma^*.$$

   - Wenn nein, gehe in Endlosschleife.
   - Andernfalls wende $\mathcal{U}$ auf x an. Wenn $\mathcal{U}$ in akzeptierender Stoppkonfiguration anhält, stoppe. Wenn $\mathcal{U}$ in nicht akzeptierender Stoppkonfiguration anhält, gehe in Endlosschleife.

2) Angenommen, $UNIV$ ist entscheidbar. Dann ist auch $\overline{UNIV} = \Sigma^* \setminus UNIV$ entscheidbar und es gibt eine DTM $\mathcal{A}_0$, die $\overline{UNIV}$ entscheidet.

   Wir betrachten nun die Sprache

   $$D = \{\text{code}(\mathcal{A}) \mid \text{code}(\mathcal{A})\text{code}(\mathcal{A}) \notin UNIV\}$$

   d.h. die Maschine $\mathcal{A}$ akzeptiert ihre eigene Kodierung nicht).

   Diese Sprache kann leicht mit Hilfe von $\mathcal{A}_0$ entschieden werden:

   - Bei Eingabe x dupliziert man x und
   - startet dann $\mathcal{A}_0$ mit Eingabe xx.

   Es sei $\mathcal{A}_D$ die DTM, die D entscheidet. Es gilt nun (für $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D$):

   $$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_D \text{ akzeptiert code}(\mathcal{A}_D) & \text{gdw.} \quad \text{code}(\mathcal{A}_D) \in D & (\text{denn } L(\mathcal{A}_D) = D) \\ & \text{gdw.} \quad \text{code}(\mathcal{A}_D)\text{code}(\mathcal{A}_D) \notin UNIV & (\text{nach Def. } D) \\ & \text{gdw.} \quad \mathcal{A}_D \text{ akzeptiert code}(\mathcal{A}_D) \text{ nicht.} & (\text{nach Def. } UNIV) \end{array}$$

   Widerspruch. □

Die in Teil 2 des Beweises verwendete Vorgehensweise nennt man *Diagonalisierung*. Es gibt zwei Dimensionen

- Turingmaschinen
- Eingabe der TM,

und die Sprache D entspricht der Diagonalen: TM wird als Eingabe ihre eigene Kodierung gegeben.

Ein anderes bekanntes Beispiel für ein Diagonalisierungsargument ist Cantors Beweis für die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, siehe Mathe 1. Auch im Beweis von Satz 13.3 haben wir ein Diagonalisierungsargument benutzt.

Wir wenden im folgenden Einschub Diagonalisierung an, um zu zeigen, dass es nichtkontextsensitive Typ-0-Sprachen gibt.

Satz 16.5
$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$.

Beweis. Es sei

- $G_0, G_1, \ldots$ eine effektive (d.h. mit TM machbare) Aufzählung aller kontextsensitiven Grammatiken mit Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- und $w_0, w_1, \ldots$ eine effektive Aufzählung aller Wörter über Σ.

Wir definieren nun $L \subseteq \{a, b\}^*$ als

$$L = \{w_i \mid i \geq 0 \wedge w_i \notin L(G_i)\} \quad \text{(Diagonalisierung!)}.$$

- L ist Turing-erkennbar und damit aus $\mathcal{L}_0$. In der Tat ist L sogar entscheidbar: bei Eingabe w kann eine DTM
  - durch Aufzählen der $w_0, w_1, \ldots$ den Index i mit $w = w_i$ bestimmen
  - durch Aufzählen der $G_0, G_1, \ldots$ dann auch die Grammatik G_i konstruieren
  - dann das Wortproblem für $w_i \in L(G_i)$ für Typ 1-Sprachen entscheiden (siehe Satz 12.7)
- L ist nicht kontextsensitiv. Anderenfalls gäbe es einen Index k mit $L = L(G_k)$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} w_k \in L(G_k) \quad &\underline{\text{gdw}}. \quad w_k \in L && \text{(denn } L(G_k) = L\text{)} \\ &\underline{\text{gdw}}. \quad w_k \notin L(G_k) && \text{(nach Def. } L\text{)} \end{aligned}$$

  Widerspruch.

□

Aus der Unentscheidbarkeit von $UNIV$ kann man weitere wichtige Unentscheidbarkeitsresultate herleiten. $UNIV$ ist offensichtlich nichts anderes als das Wortproblem für DTMs, kodiert als Turingmaschine. Es folgt daher sofort das folgende Theorem.

Satz 16.6

Das Wortproblem für DTM ist unentscheidbar, d.h. es gibt kein Berechnungsverfahren, das zu jeder gegebenen DTM $\mathcal{A}$ und jedem Eingabewort w entscheidet, ob $\mathcal{A}$ das Wort w akzeptiert.

Eine Variante ist das Wortproblem für Typ 0-Grammatiken, d.h. die Frage, ob für eine gegebene Typ 0-Grammatik G und ein gegebenes Wort w gilt, dass $w \in L(G)$. Wäre diese Variante entscheidbar, so wäre auch das Wortproblem für DTMs entscheidbar, was ja nach Satz 16.6 nicht der Fall ist: gegeben eine DTM $\mathcal{A}$ und ein Eingabewort w könnte man zunächst $\mathcal{A}$ in eine äquivalente Typ 0-Grammatik G wandeln (wie im Beweis von Satz 12.1; man beachte, dass die Konstruktion dort mit einer TM implementierbar ist) und dann entscheiden, ob $w \in L(G)$. Auch das Wortproblem für Typ 0-Grammatiken ist also unentscheidbar.

Satz 16.7

Das Halteproblem für DTM ist unentscheidbar, d.h. es gibt kein Berechnungsverfahren, das zu jeder gegebenen DTM $\mathcal{A}$ entscheidet, ob $\mathcal{A}$ beginnend mit leerem Eingabeband terminiert.

Beweis. Wir zeigen: wäre das Halteproblem entscheidbar, so auch das Wortproblem. Das ist aber nicht der Fall.

Um von einer gegebenen DTM $\mathcal{A}$ und einem gegebenem Wort w zu entscheiden, ob $w \in L(\mathcal{A})$, könnte man dann nämlich wie folgt vorgehen:

Modifiziere $\mathcal{A}$ zu einer TM $\hat{\mathcal{A}}$:

- $\hat{\mathcal{A}}$ schreibt zunächst w auf das Band.
- Danach verhält sich $\hat{\mathcal{A}}$ wie $\mathcal{A}$.
- Stoppt $\mathcal{A}$ mit *akzeptierender* Stoppkonfiguration, so stoppt auch $\hat{\mathcal{A}}$.
  Stoppt $\mathcal{A}$ mit *nichtakzeptierender* Stoppkonfiguration, so geht $\hat{\mathcal{A}}$ in Endlosschleife.

Damit gilt:

$$\mathcal{A} \text{ akzeptiert } w \quad \underline{\text{gdw}}. \quad \hat{\mathcal{A}} \text{ hält mit leerem Eingabeband.}$$

Mit dem Entscheidungsverfahren für das Halteproblem, angewandt auf $\hat{\mathcal{A}}$, könnte man also das Wortproblem „ist w in $L(\mathcal{A})$“ entscheiden. □

Satz 16.8

Das Leerheitsproblem für DTM ist unentscheidbar, d.h. es gibt kein Berechnungsverfahren, das bei gegebener DTM $\mathcal{A}$ entscheidet, ob $L(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Beweis. Da das Halteproblem unentscheidbar ist, ist mit Satz 15.3 auch dessen Komplement unentscheidbar. Wäre aber das Leerheitsproblem entscheidbar, so auch das Komplement des Halteproblems.

Um bei gegebener DTM $\mathcal{A}$ zu entscheiden, ob $\mathcal{A}$ auf leerer Eingabe *nicht* hält, konstruiert man die DTM $\hat{\mathcal{A}}$ wie folgt:

- $\hat{\mathcal{A}}$ löscht seine Eingabe.
- Danach verhält sich $\hat{\mathcal{A}}$ wie $\mathcal{A}$.
- Stoppt die Berechnung, so geht $\hat{\mathcal{A}}$ in eine akzeptierende Stoppkonfiguration.

Offenbar hält $\mathcal{A}$ auf *nicht* dem leeren Eingabeband $\underline{\text{gdw}}$. $L(\hat{\mathcal{A}}) = \emptyset$. □

Man kann aus Satz 16.8 leicht folgern, dass auch das Leerheitsproblem für Typ 0-Grammatiken unentscheidbar ist, siehe die Bemerkung nach Satz 16.6.

Satz 16.9

Das Äquivalenzproblem für DTM ist unentscheidbar.

Beweis. Offenbar kann man leicht eine DTM $\hat{\mathcal{A}}$ konstruieren mit $L(\hat{\mathcal{A}}) = \emptyset$.

Wäre das Äquivalenzproblem

$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)?$$

entscheidbar, so könnte man durch den Test

$$L(\mathcal{A}) = L(\hat{\mathcal{A}})?$$

das Leerheitsproblem für $\mathcal{A}$ entscheiden. □

Auch hier folgt wieder, dass das korrespondierende Äquivalenzproblem für Typ 0-Grammatiken unentscheidbar ist. An dieser Stelle, wo wir die Existenz unentscheidbarer aber dennoch semi-entscheidbarer Probleme bewiesen haben, kommen wir kurz auf die Abschlußeigenschaften von Typ 0-Sprachen zurück. Es stellt sich heraus, dass diese nicht unter Komplement abgeschlossen sind. Dies ist eine fundamentale Beobachtung aus der Sicht der Theorie der Berechenbarkeit.

Satz 16.10

$\mathcal{L}_0$ ist nicht unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Wir wissen von der in Satz 16.4 eingeführten Sprache $UNIV$:

- $UNIV$ ist semi-entscheidbar, d.h. gehört zu $\mathcal{L}_0$.
- $UNIV$ ist *nicht* entscheidbar.

Das Komplement $\overline{UNIV}$ gehört aber nicht zu $\mathcal{L}_0$: andernfalls wäre $\overline{UNIV}$ ja auch semi-entscheidbar und mit Satz 15.3 (Teil 4) würde folgen, dass $UNIV$ *entscheidbar* ist. □

Das in den Beweisen der Sätze 16.6 bis 16.9 gewählte Vorgehen nennt man *Reduktion*:

- Das Lösen eines Problems P_1 (z.B. Halteproblem) wird auf das Lösen eines Problem P_2 (z.B. Äquivalenzproblem) reduziert.
- Wäre daher P_2 entscheidbar, so auch P_1.
- Weiss man bereits, dass P_1 unentscheidbar ist, so folgt daher, dass auch P_2 unentscheidbar ist.

Reduktionen sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel, um die Unentscheidbarkeit von Problemen nachzuweisen. In der Tat wird dieser Ansatz wesentlich häufiger verwendet als Diagonalisierung (die aber trotzdem unverzichtbar ist, um sich erstmal ein originäres unentscheidbares Problem zu schaffen, dass man dann reduzieren kann). Formal lassen sich Reduktionen wie folgt definieren.

Definition 16.11 (Reduktion)

1) Eine *Reduktion von $L_1 \subseteq \Sigma^*$ auf $L_2 \subseteq \Sigma^*$* ist eine berechenbare Funktion

$$\mathrm{f} : \Sigma^* \to \Sigma^*,$$

für die gilt:

$$w \in L_1 \ \ \underline{\text{gdw}}. \ \ \mathrm{f}(w) \in L_2.$$

2) Wir schreiben

$$L_1 \leq L_2 \quad (L_1 \text{ ist auf } L_2 \textit{ reduzierbar}),$$

falls es eine Reduktion von L_1 nach L_2 gibt.

Lemma 16.12

1) $L_1 \leq L_2$ *und* L_2 *entscheidbar* $\Rightarrow$ L_1 *entscheidbar.*

2) $L_1 \leq L_2$ *und* L_1 *unentscheidbar* $\Rightarrow$ L_2 *unentscheidbar.*

Beweis.

1) Um „$w \in L_1$“ zu entscheiden,
   - berechnet man f(w) und
   - entscheidet „f(w) $\in L_2$“.
2) Folgt unmittelbar aus 1). □

Wir werden im Folgenden noch einige Beispiele für Reduktionen sehen. Zunächst zeigen wir mit Hilfe einer Reduktion des Halteproblems folgendes sehr starke Resultat:

Jede *nichttriviale semantische Eigenschaft* von Programmen (DTM) ist *unentscheidbar.*

- *Semantisch* heißt hier: Die Eigenschaft hängt nicht von der syntaktischen Form des Programms (der DTM), sondern nur von der erkannten Sprache ab.
- *Nichttrivial:* Es gibt Turing-erkennbare Sprachen, die die Eigenschaft erfüllen, aber nicht alle Turing-erkennbaren Sprachen erfüllen sie.

Zum Beispiel ist das Anhalten auf dem leeren Wort eine semantische und nichttriviale Eigenschaft. Also ist die Unentscheidbarkeit des Halteproblems eine konkrete Instanz des hier bewiesenen, sehr allgemeinen Resultates. Da nach der Church-Turing-These DTMs äquivalent zu jedem anderen Berechnungsmodell sind, kann man diese Aussage intuitiv so verstehen, dass *alle interessanten Eigenschaften*, die das *Verhalten von Programmen* betreffen, unentscheidbar sind. Man kann beispielsweise kein Programm schreiben, das ein Programm als Eingabe erhält und entscheidet, ob dieses terminiert oder sich in einer Endlosschleife verfängt. Dies hat weitreichende Konsequenzen im Gebiet der Programmverifikation, wo man Programme automatisch auf ihre Korrektheit prüfen möchte.

Ein Beispiel für eine *nicht* semantische Eigenschaft ist zum Beispiel: die DTM macht auf dem leeren Wort mehr als 100 Schritte.

Wir setzen im Folgenden semantische Eigenschaften von DTMs mit Eigenschaften der von ihnen erkannten Sprachen gleich: eine *Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen* ist eine Menge

$$E \subseteq \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ is Turing-erkennbar}\}.$$

Es folgt das angekündigte Resultat.

Satz 16.13 (Satz von Rice)
Es sei E eine Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen, so dass gilt:

$$\emptyset \subsetneq E \subsetneq \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \textit{ ist Turing-erkennbar}\}.$$

Dann ist die Sprache

$$L(E) := \{\text{code}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \textit{ DTM mit } L(\mathcal{A}) \in E\}$$

unentscheidbar.

Beweis. Sei E wie in Satz 16.13. Wir geben eine Reduktion des Halteproblems auf die Sprache $L(E)$ an, müssen also folgendes zeigen.

Gegeben eine DTM $\mathcal{A}$ kann man eine DTM $\hat{\mathcal{A}}$ konstruieren, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \text{ hält auf der leeren Eingabe} \quad \underline{\text{gdw}}. \quad L(\hat{A}) \in E.$$

Die Reduktionsfunktion f aus Definition 16.11 bildet also $\mathcal{A}$ auf $\text{f}(\mathcal{A}) = \hat{\mathcal{A}}$ ab. Beachte, dass die Funktion f berechenbar sein muss, d.h. die Konstruktion von $\hat{\mathcal{A}}$ aus $\mathcal{A}$ muss effektiv mittels einer DTM realisierbar sein.

Zur Konstruktion von $\hat{\mathcal{A}}$ verwenden wir

(a) eine Sprache $L_E \in E$ und eine dazugehörige DTM $\mathcal{A}_E$ mit $L(\mathcal{A}_E) = L_E$ (so eine Sprache und DTM existieren, da E nichttrivial)

(b) die Annahme, dass die leere Sprache E nicht erfüllt (dazu später mehr).

Konstruiere nun zu gegebener DTM $\mathcal{A}$ die DTM $\hat{\mathcal{A}}$ wie folgt:

- $\hat{A}$ speichert zunächst die Eingabe w
- danach löscht $\hat{A}$ das Eingabeband und verhält sich genau wie $\mathcal{A}$ (auf der leeren Eingabe)
- wenn $\mathcal{A}$ terminiert, so wird die ursprüngliche Eingabe w auf dem Eingabeband wiederhergestellt; dann verhält sich $\hat{A}$ wie die Maschine $\mathcal{A}_E$.

Man sieht leicht, dass $\hat{\mathcal{A}}$ sich wie gewünscht verhält:

1. wenn $\mathcal{A}$ auf ε anhält, dann erkennt $\hat{\mathcal{A}}$ die Sprache L_E, also $L(\hat{\mathcal{A}}) \in E$;
2. wenn $\mathcal{A}$ auf ε nicht anhält, dann erkennt $\hat{\mathcal{A}}$ die leere Sprache, also $L(\hat{\mathcal{A}}) \notin E$.

Wir gehen nun noch kurz auf die obige Annahme (b) ein. Wenn die leere Sprache E erfüllt, dann betrachten wir stattdessen die Komplementäreigenschaft

$$\overline{E} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist Turing-erkennbar}\} \setminus E$$

Diese wird dann nicht von der leeren Sprache erfüllt und wir können wie oben zeigen, dass $L(\overline{E})$ unentscheidbar. Unentscheidbarkeit von $L(E)$ folgt dann mit Teil 3 von Satz 15.3 und der Beobachtung, dass

$$L(\overline{E}) = \overline{L(E)} \cap CODE.$$

□

17. Weitere unentscheidbare Probleme

Die bisher als unentscheidbar nachgewiesenen Probleme beziehen sich allesamt auf (semantische) Eigenschaften von Turingmaschinen bzw. von Programmen. Derartige Probleme spielen im Gebiet die automatischen Programmverifikation eine wichtige Rolle. Es gibt aber auch eine große Zahl von unentscheidbaren Problemen, die (direkt) nichts mit Programmen zu tun haben. In diesem Abschnitt betrachten wir einige ausgewählte Probleme dieser Art.

Das folgende von Emil Post definierte Problem ist sehr nützlich, um mittels Reduktion Unentscheidbarkeit zu zeigen.

Definition 17.1 (Postsches Korrespondenzproblem)
Eine Instanz des *Postschen Korrespondenzproblems (PKP)* ist gegeben durch eine endliche Folge

$$P = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$$

von Wortpaaren mit $x_i, y_i \in \Sigma^*$, für ein endliches Alphabet Σ.

Eine *Lösung* des Problems ist eine *Indexfolge* $i_1, \ldots, i_m$ mit

- $m > 0$ und
- $i_j \in \{1, \ldots, k\}$,

so dass gilt: $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$.

Beispiel:

1) $P_1 = (a, aaa), (abaa, ab), (aab, b)$

   hat z.B. die Folgen 2, 1 und 1, 3 als Lösungen

   $abaa|a \qquad a|aab$
   $ab|aaa \qquad aaa|b$

   und damit auch 2, 1, 1, 3 sowie 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...

2) $P_2 = (ab, aba), (baa, aa), (aba, baa)$

   hat keine Lösung: jede Lösung müsste mit dem Index 1 beginnen, da in allen anderen Paaren das erste Symbol von x_i and y_i verschieden ist. Danach kann man nur mit dem Index 3 weitermachen (beliebig oft). Dabei bleibt die Konkatenation $y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ stets länger als die Konkatenation $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$.

Um die Unentscheidbarkeit des PKP zu zeigen, führen wir zunächst ein Zwischenproblem ein, das *modifizierte PKP (MPKP)*:

Hier muss für die Lösung zusätzlich $i_1 = 1$ gelten, d.h. das Wortpaar, mit dem man beginnen muss, ist festgelegt.

Lemma 17.2
Das MPKP kann auf das PKP reduziert werden.

Beweis. Es sei $P = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ eine Instanz des MPKP über dem Alphabet Σ. Es seien $\#, \$$ Symbole, die nicht in Σ vorkommen.

Wir definieren die Instanz $\widehat{P}$ des PKP über $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\#, \$\}$ wie folgt:

$$\widehat{P} := (x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), \ldots, (x'_k, y'_k), (x'_{k+1}, y'_{k+1}),$$

wobei gilt:

- Für $1 \leq i \leq k$ entsteht x'_i aus x_i, indem man *hinter jedem* Symbol ein # einfügt. Ist z.B. $x_i = abb$, so ist $x'_i = a\#b\#b\#$.
- Für $1 \leq i \leq k$ entsteht y'_i aus y_i, indem man *vor jedem* Symbol ein # einfügt.
- $x'_0 := \#x'_1$ und $y'_0 := y'_1$
- $x'_{k+1} := \$$ und $y'_{k+1} := \#\$$

Offenbar ist die Reduktion berechenbar, und man kann leicht zeigen, dass gilt:

„Das MPKP P hat eine Lösung." gdw. „Das PKP $\widehat{P}$ hat eine Lösung." □

Beispiel:
$P = (a, aba), (bab, b)$ ist als MPKP lösbar mit Lösung 1, 2. Die Sequenz 2,1 liefert zwar identische Konkatenationen, ist aber im MPKP nicht zulässig. Die Konstruktion liefert:

$$\begin{array}{rcccc} & (x'_0, y'_0) & (x'_1, y'_1) & (x'_2, y'_2) & (x'_3, y'_3) \\ \widehat{P} = & (\#a\#, \#a\#b\#a), & (a\#, \#a\#b\#a), & (b\#a\#b\#, \#b), & (\$, \#\$) \end{array}$$

Die Lösung 1, 2 von P liefert die Lösung 1, 3, 4 von $\widehat{P}$:

$\#a\#|\, b\#a\#b\#|\$$
$\#a\#\, b\#a|\#b|\#\$$

Die Sequenz 2,1 liefert keine Lösung von $\widehat{P}$: wegen der Verwendung des #-Symbols muss jede Lösung von $\widehat{P}$ mit Index 0 anfangen. Dies entspricht wie gewünscht Lösungen von P, die mit Index 1 beginnen.

Wäre daher das PKP entscheidbar, so auch das MPKP. Um die Unentscheidbarkeit des PKP zu zeigen, genügt es also zu zeigen, dass das MPKP unentscheidbar ist.

Lemma 17.3
Das Halteproblem kann auf das MPKP reduziert werden.

Beweis. Gegeben sei eine DTM $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ und ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$.

Wir müssen zeigen, wie eine TM eine gegebene Eingabe $\mathcal{A}, w$ in eine Instanz $P_{\mathcal{A},w}$ des MPKP überführen kann, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \text{ hält auf Eingabe } w \text{ gdw. } P_{\mathcal{A},w} \text{ hat eine Lösung.}$$

Wir verwenden für das MPKP $P_{\mathcal{A},w}$ das Alphabet $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ mit $\# \notin \Gamma \cup Q$. Das MPKP $P_{\mathcal{A},w}$ besteht aus den folgenden Wortpaaren:

1) Anfangsregel:

$$(\#,\ \#q_0w\#)$$

2) Kopierregeln:

$$(a,\ a) \text{ für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

3) Übergangsregeln:

$$\begin{aligned}
(qa,\ q'a') &\quad \text{falls } (q,a,a',n,q') \in \Delta \\
(qa,\ a'q') &\quad \text{falls } (q,a,a',r,q') \in \Delta \\
(bqa,\ q'ba') &\quad \text{falls } (q,a,a',l,q') \in \Delta \text{ und } b \in \Gamma \\
(\#qa,\ \#q'\not{b}\,a') &\quad \text{falls } (q,a,a',l,q') \in \Delta \\
(q\#,\ q'a'\#) &\quad \text{falls } (q,\not{b},a',n,q') \in \Delta \\
(q\#,\ a'q'\#) &\quad \text{falls } (q,\not{b},a',r,q') \in \Delta \\
(bq\#,\ q'ba'\#) &\quad \text{falls } (q,\not{b},a',l,q') \in \Delta \\
(\#q\#,\ \#q'\not{b}\,a'\#) &\quad \text{falls } (q,\not{b},a',l,q') \in \Delta
\end{aligned}$$

4) Löschregeln:

   (aq,q) und (qa,q) für alle $a \in \Gamma$ und $q \in Q$ Stoppzustand

   (O.B.d.A. hänge in $\mathcal{A}$ das Stoppen nur vom erreichten Zustand, aber nicht vom gerade gelesenen Bandsymbol ab; ein *Stoppzustand* ist dann ein Zustand q, so dass die TM in q bei jedem gelesenen Symbol anhält.)

5) Abschlussregel:

$$(q\#\#,\#) \text{ für alle } q \in Q \text{ mit } q \text{ Stoppzustand}$$

Falls $\mathcal{A}$ bei Eingabe w hält, so gibt es eine Berechnung

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} \ldots \vdash_{\mathcal{A}} k_t$$

mit $k_0 = q_0w$ und $k_t = u\hat{q}v$ mit $\hat{q}$ Endzustand.

Daraus kann man eine Lösung des MPKP bauen. Zunächst erzeugt man

$$\begin{aligned}
&\#k_0\#k_1\#k_2\#\ldots\# \\
&\#k_0\#k_1\#k_2\#\ldots\#k_t\#
\end{aligned}$$

- Dabei beginnt man mit $(\#, \#k_0\#)$.
  - Durch Kopierregeln erzeugt man die Teile von k_0 und k_1, die sich nicht unterscheiden.
  - Der Teil, der sich unterscheidet, wird durch die entsprechende Übergangsregel realisiert.

z.B. $(q, a, a', r, q') \in \Delta$ und $k_0 = \not b\, qab \not b$

$\#|a|q\, a|b|b|\#$
$\#\ a\ q\, a\ b\ b\ \#\,|\,a\,|\,a', q'|\,b\,|\,b\,|\,\#$

Man erhält so:

$\#k_0\#$
$\#k_0\#k_1\#$

- Nun macht man dies so weiter, bis die Stoppkonfiguration k_t mit Stoppzustand $\hat{q}$ erreicht ist. Durch Verwenden von Löschregeln und Kopierregeln löscht man nacheinander die dem Stoppzustand benachbarten Symbole von k_t, z.B.:

  $\ldots\#a\hat{q}|\,b|\#|\hat{q}\,b|\#$
  $\ldots\#a\,\hat{q}\,b\ \#|\hat{q}|b|\#|\hat{q}|\#$

- Danach wendet man die Abschlussregel an:

  $\ldots\#|\hat{q}\#\ \#$
  $\ldots\#\ \hat{q}\#|\#$

Umgekehrt zeigt man leicht, dass jede Lösung des MPKP einer haltenden Folge von Konfigurationsübergängen entspricht, welche mit k_0 beginnt:

- Man muss mit k_0 beginnen, da wir das MPKP betrachten.
- Durch Kopier- und Übergangsregeln kann man die erzeugten Wörter offensichtlich nicht gleich lang machen.
- Daher muss ein Stoppzustand erreicht werden, damit Lösch- und Abschlussregeln eingesetzt werden können.

□

Da das Halteproblem unentscheidbar ist, folgt die Unentscheidbarkeit des MPKP und damit (wegen Lemma 17.2) die Unentscheidbarkeit des PKP.

Satz 17.4

Das PKP ist unentscheidbar.

Wir verwenden dieses Resultat, um Unentscheidbarkeit von Problemen für kontextfreie und kontextsensitive Sprachen nachzuweisen. Wir zeigen zunächst:

Lemma 17.5

Das Schnitt-Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist unentscheidbar, d.h. gegeben zwei kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 ist nicht entscheidbar, ob gilt:

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset.$$

Beweis. Wir reduzieren das PKP auf das Komplement des Schnitt-Leerheitsproblems, d.h. wir zeigen:

Zu jeder gegebenen Instanz P des PKP kann eine TM kontextfreie Grammatiken $G_P^{(l)}, G_P^{(r)}$ konstruieren, so dass gilt:

$$P \text{ hat Lösung} \quad \underline{\text{gdw}}. \quad L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset.$$

Da das PKP unentscheidbar ist und ein Problem entscheidbar ist gdw. sein Komplement entscheidbar ist, folgt die Aussage des Lemmas.

Es sei $P = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$. Wir definieren $G_P^{(l)} = (N_l, \Sigma_l, P_l, S_l)$ mit

- $N_l = \{S_l\}$,
- $\Sigma_l = \Sigma \cup \{1, \ldots, k\}$ und
- $P_l = \{S_l \longrightarrow w_i S_l i, S_l \longrightarrow w_i i \mid 1 \leq i \leq k\}$.

$G_P^{(r)}$ wird entsprechend definiert. Es gilt:

$$L(G_P^{(l)}) = \{x_{i_1} \ldots x_{i_m} i_m \ldots i_1 \mid m \geq 1, i_j \in \{1, \ldots, k\}\}$$

$$L(G_P^{(r)}) = \{y_{i_1} \ldots y_{i_m} i_m \ldots i_1 \mid m \geq 1, i_j \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Daraus folgt nun unmittelbar:

$$\begin{aligned} & L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset \\ \underline{\text{gdw}}. \quad & \exists m \geq 1 \; \exists i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\} : x_{i_1} \ldots x_{i_m} i_m \ldots i_1 = y_{i_1} \ldots y_{i_m} i_m \ldots i_1 \\ \underline{\text{gdw}}. \quad & P \text{ hat Lösung.} \end{aligned}$$

□

Beachte, dass man das Schnitt-Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen nicht einfach auf das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen reduzieren kann, denn die kontextfreien Sprachen sind nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Wir wissen jedoch bereits, dass jede kontextfreie Sprache auch kontextsensitiv ist und dass die kontextsensitiven Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind (Satz 12.6). Daraus folgt der folgende Satz.

Satz 17.6

Für kontextsensitive Grammatiken sind das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Beweis. Es existiert eine einfache Reduktion des Schnitt-Leerheitsproblems kontextfreier Sprachen auf das Leerheitsproblem kontextsensitiver Sprachen: gegeben kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, konstruiere kontextsensitive Grammatik G mit $L(G) = L(G_1) \cap L(G_2)$ (zum Beispiel mittels Umweg über linear beschränkte Automaten), entscheide dann ob $L(G) = \emptyset$.

Das Leerheitsproblem ist ein Spezialfall des Äquivalenzproblems, da

$$L(G) = \emptyset \;\; \underline{\text{gdw}}. \;\; L(G) = L(G_\emptyset) \quad (G_\emptyset : \text{ kontextsensitive Grammatik mit } L(G_\emptyset) = \emptyset).$$

□

Zur Erinnerung: im Gegensatz zum Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen hatten wir gezeigt, dass das Leerheitsproblem für kontext*freie* Sprachen entscheidbar ist. Das Äquivalenzproblem ist allerdings bereits für kontextfreie Sprachen unentscheidbar. Die hier gezeigten Unentscheidbarkeitsresultate gelten natürlich auch für linear beschränkte Automaten bzw. Kellerautomaten, da man mittels einer TM Grammatiken in das entsprechende Automatenmodell übersetzen kann (und umgekehrt).

Satz 17.7

Für kontextfreie Grammatiken ist das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Beweis.

1. Man kann sich leicht überlegen, dass die Sprachen $L(G_P^{(l)})$ und $L(G_P^{(r)})$ aus dem Beweis von Lemma 17.5 durch deterministische Kellerautomaten akzeptiert werden können.

2. Die von deterministischen Kellerautomaten akzeptierten kontextfreien Sprachen sind (im Unterschied zu den kontextfreien Sprachen selbst) unter Komplement abgeschlossen.

   D.h. es gibt auch einen deterministischen Kellerautomaten und damit eine kontextfreie Grammatik für
   $$\overline{L(G_P^{(l)})}$$
   (siehe z.B. [Wege93], Satz 8.1.3).

3. Es sei $\overline{G}$ die kontextfreie Grammatik mit $L(\overline{G}) = \overline{L(G_P^{(l)})}$. Nun gilt:
   $$\begin{aligned} L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) = \emptyset \quad & \underline{\text{gdw}}. \quad L(G_P^{(r)}) \subseteq L(\overline{G}) \\ & \underline{\text{gdw}}. \quad L(G_P^{(r)}) \cup L(\overline{G}) = L(\overline{G}) \\ & \underline{\text{gdw}}. \quad L(G_\cup) = L(\overline{G}), \end{aligned}$$
   wobei $G_\cup$ die kontextfreie Grammatik für $L(G_P^{(r)}) \cup L(\overline{G})$ ist.

4. Wäre also das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken entscheidbar, so auch
   $$L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset$$
   und damit das PKP.

□

IV. Komplexität

Einführung

In der Praxis genügt es nicht zu wissen, dass eine Funktion berechenbar ist. Man interessiert sich auch dafür, wie groß der *Aufwand* zur Berechnung ist. Aufwand bezieht sich hierbei auf den Ressourcenverbrauch, wobei folgende Ressourcen die wichtigste Rolle spielen:

Rechenzeit
(bei TM: Anzahl der Übergänge bis zum Halten)

Speicherplatz
(bei TM: Anzahl der benutzten Felder)

Beides soll abgeschätzt werden als *Funktion in der Größe der Eingabe*. Dem liegt die Idee zugrunde, dass mit größeren Eingaben üblicherweise auch der Ressourcenbedarf zum Verarbeiten der Eingabe wächst.

Es ist wichtig, sauber zwischen der Komplexität von Algorithmen und der von Problemen zu unterscheiden.

Komplexität eines konkreten Algorithmus/Programmes. Wieviel Ressourcen verbaucht dieser Algorithmus? Derartige Fragestellungen gehören in das Gebiet der Algorithmentheorie und werden hier nicht primär betrachtet.

Komplexität eines Entscheidungsproblems: Wieviel Aufwand benötigt der „beste“ Algorithmus, der ein gegebenes Problem löst? Dies ist die Fragestellung, mit der sich die Komplexitätstheorie beschäftigt. Wir setzen dabei wieder „Algorithmus“ mit Turingmaschine gleich.

Die Komplexitätstheorie liefert äußerst wichtige Anhaltspunkte dafür, welche Probleme effizient lösbar sind und welche nicht. Wir betrachten die klassische Komplexitätstheorie, die sich immer am „schlimmsten Fall (worst case)“ orientiert, also an Eingaben mit maximalem Ressourcenbedarf. Die worst case Annahme ist für viele praktische Anwendungen relevant, für andere aber deutlich zu pessimistisch, da dort der schlimmste Fall selten oder niemals vorkommt. Man kann auch den „durchschnittlichen Fall (average case)“ analysieren. Dies ist jedoch technisch anspruchsvoller und erfordert ein genaues Verständnis davon, was ein durchschnittlicher Fall eigentlich ist. Auch in praktischen Anwendungen ist es oft nicht einfach, eine formale Beschreibung davon anzugeben.

18. Einige Komplexitätsklassen

Eine Komplexitätsklasse ist eine Klasse von Entscheidungsproblemen, die mit einer bestimmten „Menge“ einer Ressource gelöst werden können. Wir führen zunächst ein allgemeines Schema zur Definition von *Komplexitätsklassen* ein und fixieren dann einige fundamentale *Zeit-* und *Platzkomplexitätsklassen*. Im Gegensatz zur Berechenbarkeit ist es in der Komplexitätstheorie sehr wichtig, zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Turingmaschinen zu unterscheiden.

Zunächst führen wir formal ein, was es heißt, dass der Aufwand durch eine Funktion der Größe der Eingabe *beschränkt* ist.

Definition 18.1 (f(n)-zeitbeschränkt, f(n)-platzbeschränkt)
Es sei $\mathrm{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und $\mathcal{A}$ eine DTM über Σ.

1) $\mathcal{A}$ heißt f(n)-*zeitbeschränkt*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Maschine $\mathcal{A}$ bei Eingabe w nach $\leq \mathrm{f}(|w|)$ Schritten anhält.
2) $\mathcal{A}$ heißt f(n)-*platzbeschränkt*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Maschine $\mathcal{A}$ bei Eingabe w $\leq \mathrm{f}(|w|)$ viele Felder des Bandes benutzt.

Auf *NTM* kann man die Definition dadurch übertragen, dass die Aufwandsbeschränkung für *alle* bei der gegebenen Eingabe *möglichen Berechnungen* zutreffen muss. Beachte dass eine f(n)-zeitbeschränkte TM auf jeder Eingabe terminiert; für eine f(n)-platzbeschränkte TM muß das nicht unbedingt der Fall sein.

Definition 18.2 (Komplexitätsklassen)

$$\begin{aligned}
\mathsf{DTIME}(\mathrm{f}(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } \mathrm{f}(n)\text{-}\mathbf{zeit}\text{beschränkte } \mathbf{D}\text{TM } \mathcal{A} \text{ mit } L(\mathcal{A}) = L\} \\
\mathsf{NTIME}(\mathrm{f}(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } \mathrm{f}(n)\text{-}\mathbf{zeit}\text{beschränkte } \mathbf{N}\text{TM } \mathcal{A} \text{ mit } L(\mathcal{A}) = L\} \\
\mathsf{DSPACE}(\mathrm{f}(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } \mathrm{f}(n)\text{-}\mathbf{platz}\text{beschränkte } \mathbf{D}\text{TM } \mathcal{A} \text{ mit } L(\mathcal{A}) = L\} \\
\mathsf{NSPACE}(\mathrm{f}(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } \mathrm{f}(n)\text{-}\mathbf{platz}\text{beschränkte } \mathbf{N}\text{TM } \mathcal{A} \text{ mit } L(\mathcal{A}) = L\}
\end{aligned}$$

Wegen der Bemerkung vor Definition 18.2 enthalten alle Komplexitätsklassen der Form $\mathsf{DTIME}(\mathrm{f}(n))$ und $\mathsf{NTIME}(\mathrm{f}(n))$ nur entscheidbare Probleme. Man kann zeigen, dass das auch für alle Klassen der Form $\mathsf{DSPACE}(\mathrm{f}(n))$ und $\mathsf{NSPACE}(\mathrm{f}(n))$ gilt.

Im folgenden Beobachten wir einige elementare Zusammenhänge zwischen Komplexitätsklassen.

Satz 18.3

1) $\mathsf{DTIME}(\mathrm{f}(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(\mathrm{f}(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}(\mathrm{f}(n))$
2) $\mathsf{DTIME}(\mathrm{f}(n)) \subseteq \mathsf{NTIME}(\mathrm{f}(n))$
3) $\mathsf{NSPACE}(\mathrm{f}(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))})$ *wenn* f(n) *von einer* f(n)*-zeitbeschränkten DTM berechnet werden kann.*[1]

[1] Wobei sowohl die Eingabe als auch die Ausgabe unär kodiert sind.

Die Einschränkung in Punkt 3) von Satz 18.3 schließt extreme Fälle aus, zum Beispiel Funktionen $\mathrm{f}(n)$, die nicht berechenbar sind. Alle für uns interessanten Funktionen wie Polynome und exponentialfunktionen erfüllen die genannte Eigenschaft.

Beweis. Teile 1) und 2) folgen unmittelbar daraus, dass man in k Schritten höchstens k Felder benutzen kann und jede DTM auch eine NTM ist.

Im folgenden skizzieren wir den Beweis von Teil 3). Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(\mathrm{f}(n))$. Dann gibt es eine $\mathrm{f}(n)$-platzbeschränkte NTM $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$. Mittels der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 11.6 könnten wir $\mathcal{A}$ in eine DTM $\mathcal{A}'$ wandeln, so dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$. Allerdings terminiert $\mathcal{A}'$ nicht auf jeder Eingabe und ist daher nicht $2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$-zeitbeschränkt. Wir brauchen also eine bessere Konstruktion.

Wir stellen dazu die Berechnungen von $\mathcal{A}$ auf Eingaben w der Länge n als gerichteten Graphen dar, den sogenannten *Konfigurationsgraph* $G_{\mathcal{A},n} = (V_{\mathcal{A},n}, E_{\mathcal{A},n})$, wobei

- $V_{\mathcal{A},n}$ die Menge der Konfigurationen von $\mathcal{A}$ mit Länge höchstens $\mathrm{f}(n)$ ist und
- $E_{\mathcal{A},n}$ diejenigen Kanten (k, k') enthält, so dass k' von k in einem Berechnungsschritt erreicht werden kann.

Es ist nun offensichtlich, dass w von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird gdw. in $G_{\mathcal{A},n}$ vom Knoten $q_0 w$ aus eine akzeptierende Stoppkonfiguration erreichbar ist (wenn also ein Pfad von $\mathcal{A}$ zu einer solchen Konfiguration existiert).

Eine terminierende DTM $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$ kann also wie folgt vorgehen:

- Bei Eingabe w der Länge n, konstruiere Konfigurationsgraph $G_{\mathcal{A},n}$;[2]
- überprüfe, ob von $q_0 w$ aus eine akzeptierende Stoppkonfiguration erreichbar ist.

Wir analysieren nun den Zeitbedarf von $\mathcal{A}'$. Zunächst schätzen wir die Größe von $G_{\mathcal{A},n}$. Die Anzahl der Konfigurationen von $\mathcal{A}$ der Länge $\leq \mathrm{f}(n)$ ist beschränkt durch

$$\mathrm{akonf}_{\mathcal{A}}(n) := |Q| \cdot \mathrm{f}(n) \cdot |\Gamma|^{\mathrm{f}(n)}$$

wobei $|Q|$ die Anzahl der möglichen Zustände beschreibt, $\mathrm{f}(n)$ die Anzahl der möglichen Kopfpositionen und $|\Gamma|^{\mathrm{f}(n)}$ die Anzahl der möglichen Beschriftungen von Bändern der Länge $\mathrm{f}(n)$.

Man sieht nun leicht, dass $|V_{\mathcal{A},n}| = \mathrm{akonf}_{\mathcal{A}}(n) \in 2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$ (beachte, dass $|Q|$ und $|\Gamma|$ Konstanten sind, da sie nicht von der Eingabe abhängen) und damit auch $|E_{\mathcal{A},n}| \in 2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$. Zudem ist es für eine DTM einfach, den Graph $G_{\mathcal{A},n}$ in Zeit $2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$ zu konstruieren. Es müssen danach noch $\leq 2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$ Erreichbarkeitstests gemacht werden (einer für jede akzeptierende Stoppkonfiguration in $G_{\mathcal{A},n}$), von denen jeder lineare Zeit (in der Größe des Graphen $G_{\mathcal{A},n}$) benötigt. Insgesamt ergibt sich ein Zeitbedarf von $2^{\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))}$. □

[2] Hierzu muß man zunächst $\mathrm{f}(n)$ berechnen; da $\mathrm{f}(n)$ von einer $\mathrm{f}(n)$-zeitbeschränkten DTM berechnet werden kann, ist dies in der zur Verfügung stehenden Zeit möglich.

Wir betrachten die folgenden *fundamentalen* Komplexitätsklassen:

Definition 18.4 (P, NP, PSpace, NPSpace, ExpTime)

$$\mathsf{P} := \bigcup_{\text{p Polynom in } n} \mathsf{DTIME}(\mathrm{p}(n))$$

$$\mathsf{NP} := \bigcup_{\text{p Polynom in } n} \mathsf{NTIME}(\mathrm{p}(n))$$

$$\mathsf{PSpace} := \bigcup_{\text{p Polynom in } n} \mathsf{DSPACE}(\mathrm{p}(n))$$

$$\mathsf{NPSpace} := \bigcup_{\text{p Polynom in } n} \mathsf{NSPACE}(\mathrm{p}(n))$$

$$\mathsf{ExpTime} := \bigcup_{\text{p Polynom in } n} \mathsf{DTIME}(2^{\mathrm{p}(n)})$$

Aus Satz 18.3 ergibt sich sofort der folgende Zusammenhang zwischen diesen Klassen:

Korollar 18.5

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{P} & \subseteq & \mathsf{PSpace} & & \\ \cap\!| & & \cap\!| & & \\ \mathsf{NP} & \subseteq & \mathsf{NPSpace} & \subseteq & \mathsf{ExpTime} \end{array}$$

Wir werden später noch sehen, dass PSpace und NPSpace dieselbe Klasse sind, also PSpace = NPSpace gilt. Daher betrachtet man die Klasse NPSpace in der Regel nicht explizit. Mit obigem Korollar ergibt sich also folgendes Bild:

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSpace} \subseteq \mathsf{ExpTime}.$$

Besonders wichtig sind die Komplexitätsklassen P und NP:

- Die Probleme in P werden im allgemeinen als die *effizient lösbaren* Probleme angesehen (engl. *tractable*, d.h. machbar), siehe auch Appendix A
- Im Gegensatz dazu nimmt man an, dass NP viele Probleme enthält, die *nicht effizient lösbar* sind (engl. *intractable*)

Die Bedeutung der Komplexitätsklasse P ist dadurch hinreichend motiviert. Im Gegensatz dazu ist die Bedeutung von NP etwas schwieriger einzusehen, da nicht-deterministische Maschinen in der Praxis ja nicht existieren. Auch diese Klasse ist aber von großer Bedeutung, da

1. sehr viele natürlich Probleme aus der Informatik in NP enthalten sind, von denen

2. angenommen wird, dass sie nicht in P (also nicht effizient lösbar) sind.

Wir betrachten hier drei typische Beispiele für Probleme in NP, die wir später noch genauer analysieren werden. Das erste solche Problem ist das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik, für eine formale Definition siehe Appendix B. Dieses Problem repräsentieren wir als Menge SAT aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln. Genauer gesagt enthält SAT nicht die Formeln selbst, sondern eine geeignete Kodierung als Wörter. So muß man beispielsweise die potentiell unendlich vielen Aussagenvariablen $x_1, x_2, \ldots$ mittels eines endlichen Alphabetes darstellen. Von solchen Details, die leicht auszuarbeiten sind, werden wir im folgenden aber abstrahieren.

Lemma 18.6
$\mathsf{SAT} \in \mathsf{NP}$.

Beweis. Die NTM, die SAT in polynomieller Zeit entscheidet, arbeitet wie folgt:

- Teste, ob die Eingabe eine aussagenlogische Formel ist. Stoppe in einer nichtakzeptierenden Konfiguration, wenn das nicht der Fall ist.

  Dies ist eine Instanz des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken, das in Polynomialzeit lösbar ist (z.B. mit dem CYK-Algorithmus).
- Die Variablen in der Eingabeformel φ seien $x_1, \ldots, x_n$. Schreibe nicht-deterministisch ein beliebiges Wort $u \in \{0,1\}^*$ der Länge n hinter die Eingabe auf das Band
- Betrachte u als Belegung mit $x_i \mapsto 1$ gdw. das i-te Symbol von u eine 1 ist.

  Überprüfe nun deterministisch und in Polynomialzeit, ob diese Belegung die Formel φ erfüllt (man überlegt sich leicht, dass dies tatsächlich möglich ist). Akzeptiere, wenn das der Fall ist und verwerfe sonst.

Die NTM akzeptiert ihre Eingabe gdw. es eine erfolgreiche Berechnung gibt gdw. die Eingabe eine erfüllbar aussagenlogische Formel ist. □

Wir betrachten ein weiteres Problem in NP.

Definition 18.7 (CLIQUE)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Besitzt G eine k-*Clique*, d.h. eine Teilmenge $C \subseteq V$ mit

- für alle $u \neq v$ in C gilt: $\{u, v\} \in E$ und
- $|C| = k$.

Also besteht CLIQUE aus all denjenigen Paaren (G, k), so dass der ungerichtete Graph G eine k-Clique enthält, geeignet repräsentiert als formale Sprache.

Lemma 18.8
$\mathsf{CLIQUE} \in \mathsf{NP}$.

Beweis. Eine NTM, die CLIQUE in polynomieller Zeit entscheidet, konstruiert man analog zum Beweis von Lemma 18.6: gegeben (G, k),

- schreibe nicht-deterministisch eine Knotenmenge C der Grösse k auf das Band
- überprüfe deterministisch und in Polynomialzeit, ob C eine Clique in G ist.

□

Als drittes Beispiel für ein Problem in NP sei das bekannte Traveling Salesman Problem erwähnt.

Definition 18.9 (Traveling Salesman Problem (TSP))

Gegeben: Ein ungerichter Graph $G = (V, E)$, eine Kostenzuweisung $\mathrm{f} : E \to \mathbb{N}$ zu den Kanten und Zielkosten $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Tour durch G mit Kosten maximal k, also eine Aufzählung $u_1, \ldots, u_n$ aller Knoten in V so dass

1. $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < n$ sowie $\{u_n, u_1\} \in E$ und
2. $\sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{f}(\{u_i, u_{i+1}\}) \leq k$.

Intuitiv beschreiben die Knoten in G Städte, die ein Handlungsreisender besuchen will. Die Kanten in G beschreiben Verbindungen zwischen Städten und die Funktion f gibt die Kosten dieser Verbindungen an. Gesucht ist nun eine günstige Rundreise, bei der jede Stadt genau einmal besucht wird und der Reisende zum Schluß wieder am Ausgangspunkt ankommt.

Lemma 18.10
TSP $\in$ NP.

Beweis. Eine NTM, die TSP in polynomieller Zeit entscheidet, konstruiert man wieder analog zum Beweis von Lemma 18.6: gegeben $G = (V, E)$, f und k,

- schreibe nicht-deterministisch eine Aufzählung von V auf das Band
- überprüfe deterministisch und in polynomieller Zeit, ob die Bedingungen 1-3 aus Definition 18.9 erfüllt sind.

□

Algorithmen, wie sie in den Beweisen der Lemmas 18.6, 18.8 und 18.10 verwendet wurden, formuliert man üblicherweise mittels der Metapher des *ratens*, zum Beispiel für SAT:

- Bei Eingabe von Formel φ mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$, *rate* Wahrheitsbelegung B für $x_1, \ldots, x_n$
- Überprüfe deterministisch und in Polyzeit, ob B die Formel φ erfüllt.

Die NTM akzeptiert also die Eingabe, wenn es *möglich* ist, so zu raten, dass die Berechnung erfolgreich ist (in akzeptierender Stoppkonfiguration endet). Man kann sich vereinfachend vorstellen, dass die Maschine *richtig rät*, sofern dies überhaupt möglich ist. Man beachte aber, dass eine polyzeitbeschränkte NTM nur ein polynomiell großes Wort raten kann und dass man deterministisch in Polyzeit prüfen können muß, ob richtig geraten wurde. So ist es zum Beispiel möglich, zu raten, ob eine gegebene TM auf dem leeren Band anhält, aber es ist dann nicht möglich zu überprüfen, ob richtig geraten wurde.

Man mag sich fragen, ob es sinnvoll ist, die Komplexitätsklassen P und NP basierend auf *Turingmaschinen* zu definieren. Könnte es nicht sein, dass man ein Problem in einer modernen Programmiersprache wie Java mit viel weniger Berechnungsschritten lösen kann als auf einer TM? Interessanterweise scheint das nicht der Fall zu sein: für alle bekannten Berechnungsmodelle gilt, dass sie sich gegenseitig mit *höchstens polynomiellem Mehraufwand* simulieren können. Dies führt zu folgender Verschärfung der Church-Turing-These.

Erweiterte Church-Turing-These:
Für jedes "vernünftige und vollständige" Berechnungsmodell gibt es ein Polynom p, so dass gilt: jedes Problem, das in diesem Modell von einem $\mathrm{f}(n)$-zeitbeschränkten Algorithmus entschieden werden kann, kann mittels einer $p(\mathrm{f}(n))$-zeitbeschränkten Turingmaschine entschieden werden, und umgekehrt.

Die erweiterte Church-Turing-These hat denselben Status wie die ursprüngliche Church-Turing-These: sie bezieht sich auf formal nicht definierte Begriffe (wie "vernünftiges Berechnungsmodell") und kann daher nicht bewiesen werden. Sie wird dennoch als gültig angenommen, da bis heute kein Gegenbeispiel gefunden werden konnte.

19. NP-vollständige Probleme

Wegen $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$ enthält NP auch einfach lösbare Probleme. Es stellt sich also die Frage: welche Probleme in NP sind schwierig, also nicht in polynomieller Zeit entscheidbar? Bemerkenswerterweise hat auf diese Frage noch niemand eine wasserdichte Antwort gefunden:

- es gibt sehr viele Probleme in NP, von denen man annimmt, dass sie nicht in polynomieller Zeit zu lösen sind (z.B. SAT, CLIQUE und TSP);
- dennoch konnte man bisher von keinem einzigen Problem in NP *beweisen*, dass es nicht in P ist.

Es ist also im Prinzip nicht mal ausgeschlossen, dass die als schwierig vermuteten Probleme in NP sich doch als einfach herausstellen und daher gilt: $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Daran glaubt jedoch kaum jemand. Ein Beweis von $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ steht aber nach wie vor aus. In der Tat handelt es sich dabei um das berühmteste offene Problem der theoretischen Informatik.

Um die schwierigen Probleme in NP von den einfachen abzugrenzen, obwohl nicht einmal $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ bekannt ist, behilft sich mit der fundamentalen Idee der NP-*Vollständigkeit*. Intuitiv gehört jedes NP-vollständige Problem L zu den schwersten Problemen in NP, in folgendem Sinne:

> für jedes Problem $L' \in \mathsf{NP}$ gilt: das Lösen von L' erfordert *nur polynomiell mehr Zeitaufwand* als das Lösen von L.

Insbesondere gilt für jedes NP-vollständige Problem L: wenn $L \in \mathsf{P}$, ist *jedes* Problem aus NP auch in P, es gilt also $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ (was vermutlich nicht der Fall ist).

Um *polynomiellen Mehraufwand* zu formalisieren, verfeinern wir in geeigneter Weise den Begriff der Reduktion.

Definition 19.1 (Polynomialzeitreduktion, $\leq_p$)

1) Eine Reduktion f von $L \subseteq \Sigma^*$ auf $L' \subseteq \Sigma^*$ heißt *Polynomialzeitreduktion*, wenn es ein Polynom $p(n)$ und eine $p(n)$-zeitbeschränkte DTM gibt, die f berechnet.
2) Wenn es eine Polynomialzeitreduktion von L auf L' gibt, dann schreiben wir $L \leq_p L'$.

Die meisten wichtigen Eigenschaften von Reduktionen gelten auch für Polynomialzeitreduktionen, insbesondere:

Lemma 19.2
Wenn $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_3$, dann $L_1 \leq_p L_3$.

Der Beweis dieses Lemmas ähnelt dem Beweis von Lemma 19.4 und wird als Übung gelassen. Wir definieren nun die zentralen Begriffe dieses Kapitels.

Definition 19.3 (NP-hart, NP-vollständig)

1) Eine Sprache L heißt NP-*hart* wenn für *alle* $L' \in \mathsf{NP}$ gilt: $L' \leq_p L$.
2) L heißt *NP-vollständig* wenn $L \in \mathsf{NP}$ und L ist NP-hart.

Das folgende Lemma ist der Grund, warum die Aussage „L ist NP-vollständig“ ein guter Ersatz für die Aussage „$L \notin \mathsf{P}$“ ist, solange $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ nicht bewiesen ist.

Lemma 19.4
Für jede NP*-vollständige Sprache L gilt: wenn $L \in \mathsf{P}$, dann $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.*

Beweis. Es sei L NP-vollständig und $L \in P$, Dann gibt es ein Polynom $p(n)$ und eine $p(n)$-zeitbeschränkte DTM $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Wir müssen zeigen, dass daraus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P}$ folgt.

Sei also $L' \in \mathsf{NP}$. Da L NP-vollständig, gilt $L' \leq_p L$, d.h. es gibt eine Reduktion f von L' auf L, die in Zeit $q(n)$ berechenbar ist, wobei $q(n)$ ein Polynom ist.

Die Polynomialzeit-DTM, die L entscheidet, geht wie folgt vor:

- Bei Eingabe w berechnet sie f(w). Sie benötigt $\leq$ q($|w|$) viel Zeit. Daher ist auch die Länge der erzeugten Ausgabe $\leq |w| + \mathrm{q}(|w|)$.
- Wende Entscheidungsverfahren für L auf f(w) an.

Insgesamt benötigt man somit

$$\leq \mathrm{q}(|w|) + \mathrm{p}(|w| + \mathrm{q}(|w|))$$

viele Schritte, was ein Polynom in $|w|$ ist. □

Es ist zunächst nicht unmittelbar klar, warum NP-vollständige Probleme überhaupt existieren sollten. Überraschenderweise stellt sich aber heraus, dass es sehr viele solche Probleme gibt. Ein besonders wichtiges ist das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Das folgende sehr bekannte Resultat wurde unabhängig voneinander von Cook und Levin bewiesen.

Satz 19.5
SAT *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathsf{SAT} \in \mathsf{NP}$. Es bleibt also, zu beweisen, dass SAT NP-hart ist. Mit anderen Worten: wir müssen zeigen, dass *jedes* Problem $L \in \mathsf{NP}$ polynomiell auf SAT reduzierbar ist. Allen diesen Probleme gemeinsam ist, dass sie (per Definition von NP) als das Wortproblem einer polynomiell zeitbeschränkten NTM aufgefasst werden können.

Sei also $\mathcal{A}$ eine $p(n)$-zeitbeschränkte NTM, mit $p(n)$ Polynom. Unser Ziel ist, für jede Eingabe w eine AL-Formel φ_w zu finden, so dass

1. w wird von $\mathcal{A}$ akzeptiert gdw. φ_w ist erfüllbar und
2. φ_w kann in polynomieller Zeit (in $|w|$) konstruiert werden.

Die Konstruktion von φ_w beruht auf den folgenden Ideen. Jede Berechnung von $\mathcal{A}$ auf Eingabe $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ kann man wie folgt als Matrix darstellen:

$\not b$	$\cdots$	$\not b$	a_0, q_0	a_1	$\cdots$	a_{n-1}	$\not b$	$\cdots$	$\not b$
$\not b$	$\cdots$	$\not b$	b	a_1, q	$\cdots$	a_{n-1}	$\not b$	$\cdots$	$\not b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Jede Zeile der Matrix repräsentiert eine Konfiguration, wobei die oberste Zeile der Startkonfiguration entspricht und die folgenden Zeile jeweils der Folgekonfiguration. Da Anzahl der Zeilen ist also durch $p(n) + 1$ beschränkt und wir nummerieren die Zeilen von 0 bis $p(n)$. Um eine Nummerierung der Spalten zu erhalten, weisen wir der Spalte, in der in der ersten Zeile der Kopf steht, die Nummer 0 zu. Aufgrund der Zeitbeschränkung von $p(n)$ sind die Spalten mit den Nummern $-p(n), \ldots, p(n)$ ausreichend.

Diese Matrix lässt sich wiederum mittels polynomiell vieler Aussagenvariablen darstellen:

- $B_{a,i,t}$: zum Zeitpunkt t ist Zelle i mit a beschriftet
- $K_{i,t}$: zum Zeitpunkt t ist der Kopf über Zelle i
- $Z_{q,t}$: zum Zeitpunkt t ist q der aktuelle Zustand

wobei $0 \leq t \leq p(n)$, $-p(n) \leq i \leq p(n)$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$. Wenn beispielsweise in der Startkonfiguration die Zelle 3 mit dem Symbol a beschriftet ist, so wird dies dadurch repräsentiert, dass $B_{a,3,0} \mapsto 1$ und $B_{b,3,0} \mapsto 0$ für alle $b \in \Gamma \setminus \{a\}$.

Die für die Eingabe w konstruierte Formel φ_w verwendet die obigen Variablen. Wir werden φ_w so konstruieren, dass erfüllende Belegungen von φ_w genau den akzeptierenden Berechnungen von $\mathcal{A}$ auf w entsprechen. Genauer ist φ_w eine Konjunktion, die aus den folgenden Konjunkten besteht:

(i) Die Berechnung beginnt mit der Startkonfiguration für $w = a_1 \cdots a_n$:

$$\psi_{\text{ini}} := Z_{q_0,0} \wedge K_{0,0} \wedge \bigwedge_{0 \leq i < n} B_{a_i,i,0} \wedge \bigwedge_{n \leq i \leq p(n)} B_{\not b,i,0} \wedge \bigwedge_{-p(n) \leq i < 0} B_{\not b,i,0}.$$

(ii) Die Übergangsrelation wird respektiert:

$$\psi_{\text{move}} := \bigwedge_{0 \leq t < p(n)} \bigwedge_{-p(n) \leq i \leq p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma, q \in Q \text{ kein Stoppzustand}} \Big(\big(B_{a,i,t} \wedge K_{i,t} \wedge Z_{p,t}\big) \rightarrow \bigvee_{(q,a,a',M,q') \in \Delta \text{ so dass } -p(n) \leq M(i) \leq p(n)} \big(B_{a',M(i),t+1} \wedge K_{M(i),t+1} \wedge Z_{q',t+1}\big) \Big)$$

wobei $M \in \{r, \ell, n\}$, $r(i) = i + 1$, $\ell(i) = i - 1$ und $n(i) = i$

Wir nehmen hier wieder o.B.d.A. an, dass das Stoppen nur vom Zustand, aber nicht vom gelesenen Symbol abhängt (es macht daher Sinn, von Stopp*zuständen* zu sprechen).

(iii) Zellen, die nicht unter dem Kopf sind, ändern sich nicht:

$$\psi_{\text{keep}} := \bigwedge_{0 \le t < p(n)} \bigwedge_{-p(n) \le i \le p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \Big(\big(\neg K_{i,t} \wedge B_{a,i,t}\big) \to B_{a,i,t+1} \Big)$$

(iv) Die Eingabe wird akzeptiert:

$$\psi_{\text{acc}} := \bigwedge_{q \in Q \setminus F \text{ Stoppzustand}} \bigwedge_{0 \le t \le p(n)} \neg Z_{q_f,t}$$

Es würde hier nicht funktionieren, das Vorkommen eines akzeptierenden Stoppzustandes zu fordern, denn dann wären unerwünschte Belegungen der folgenden Form möglich: eine verwerfende Berechnung von $\mathcal{A}$, die weniger als die maximal möglichen $p(n)$ Schritte macht, gefolgt von einer Konfiguration mit akzeptierendem Stoppzustand, obwohl $\mathcal{A}$ gar keine weiteren Schritte macht.

(v) Bandbeschriftung, Kopfposition, Zustand sind eindeutig und definiert:

$$\psi_{\text{aux}} := \bigwedge_{t,q,q',q \ne q'} \neg(Z_{q,t} \wedge Z_{q',t}) \wedge \bigwedge_{t,i,a,a',a \ne a'} \neg(B_{a,i,t} \wedge B_{a',i,t}) \wedge \bigwedge_{t,i,j,i \ne j} \neg(K_{i,t} \wedge K_{j,t})$$

$$\bigwedge_t \bigvee_q Z_{q,t} \wedge \bigwedge_t \bigvee_i K_{i,t} \wedge \bigwedge_t \bigwedge_i \bigvee_a B_{a,i,t}$$

Hierbei läuft t jeweils implizit über $0..p(n)$, q und q' laufen über q, i und j über $-p(n)..p(n)$, sowie a und a' über Γ.

Setze nun

$$\varphi_w = \varphi_{\text{ini}} \wedge \varphi_{\text{move}} \wedge \varphi_{\text{keep}} \wedge \varphi_{\text{acc}} \wedge \varphi_{\text{aux}}.$$

Man überprüft leicht, dass $\mathcal{A}$ die Eingabe w akzeptiert gdw. φ_w erfüllbar. Idee:

"$\Leftarrow$" Wenn w von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, dann gibt es akzeptierende Berechnung

$$k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} k_m$$

von $\mathcal{A}$ auf w. Erzeuge daraus in der offensichtlichen Weise eine Belegung für die Variablen $B_{a,i,t}$, $K_{i,t}$ und $Z_{q,t}$, zum Beispiel:

$B_{a,i,t} \mapsto 1$ wenn die i-te Zelle in k_t mit a beschriftet ist.

Wenn $m < p(n)$ (die Berechnung endet vor der maximal möglichen Anzahl von Schritten), dann verlängere die Folge $k_0, k_1, \ldots, k_m$ zuvor zu $k_0, k_1, \ldots, k_{p(n)}$ durch $p(n) - m$-maliges Wiederholen der Konfiguration k_m.

Indem man alle Konjunkte von φ_w durchgeht, überprüft man leicht, dass die erhaltene Belegung φ_w erfüllt. Also ist φ_w erfüllbar.

"$\Rightarrow$" Aus einer Belegung der Variablen $B_{a,i,t}$, $K_{i,t}$, $Z_{q,t}$, die φ_w erfüllt, liest man eine Konfigurationsfolge $k_0 \vdash_{\mathcal{A}} k_1 \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} k_m$ ab, zum Beispiel:

Die i-te Zelle in k_t wird mit a beschriftet wenn $B_{a,i,t} \mapsto 1$.

Die Konfigurationsfolge endet, sobald ein Stoppzustand abgelesen wurde. Unter Verwendung der Tatsache, dass die Belegung alle Konjunkte von φ_w erfüllt, zeigt man nun leicht, dass es sich bei der abgelesenen Konfigurationsfolge um eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{A}$ auf w handelt.

□

Analog zu unserem Vorgehen bei der Unentscheidbarkeit erhalten wir weitere NP-vollständige Probleme durch polynomielle Reduktion von bereits als NP-vollständig nachgewiesenen Problemen wie SAT. Dies beruht auf Punkt 2) des folgenden Satzes, der die wichtigsten Zusammenhänge von NP und Polynomialzeitreduktionen zusammenfasst.

Satz 19.6

1) Ist $L_2 \in$ NP und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_1 in NP.

2) Ist L_1 NP-hart und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_2 NP-hart.

Beweis.

1) Wegen $L_2 \in$ NP gibt es eine polynomialzeitbeschränkte NTM $\mathcal{A}$, die L_2 akzeptiert. Wegen $L_1 \leq_p L_2$ gibt es eine Polynomialzeitreduktion f von L_1 auf L_2, also

$$w \in L_1 \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{f}(w) \in L_2.$$

Die polynomialzeitbeschränkte NTM für L_1 arbeitet wie folgt:

- Bei Eingabe w berechnet sie zunächst $\mathrm{f}(w)$.
- Dann wendet sie $\mathcal{A}$ auf $\mathrm{f}(w)$ an.

2) Sei L_1 NP-hart und $L_1 \leq_p L_2$. Wähle ein $L \in$ NP. Wir müssen zeigen, dass $L \leq_p L_2$.

Da L_1 NP-hart, gilt $L \leq_p L_1$. Mit $L_1 \leq_p L_2$ und Lemma 19.2 folgt wie gewünscht $L \leq_p L_2$.

□

Mit Punkt 2) von Satz 19.6 kann man also die NP-Härte eines Problems L nachweisen, indem man eine Polynomialzeitreduktion eines bereits als NP-vollständig bekannten Problems wie SAT auf L findet. Dies wollen wir im folgenden an einigen Beispiele illustrieren. Wie beginnen mit einem Spezialfall von SAT, bei dem nur aussagenlogische Formeln einer ganz speziellen Form als Eingabe zugelassen sind. Das dadurch entstehende Problem 3SAT spielt eine wichtige Rolle, da es oft einfacher ist, eine Reduktion von 3SAT auf ein gegebenes Problem L zu finden als eine Reduktion von SAT.

Definition 19.7 (3SAT)

Eine *3-Klausel* ist von der Form $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, wobei ℓ_i eine Variable oder eine negierte Variable ist. Eine *3-Formel* ist eine endliche Konjunktion von 3-Klauseln. 3SAT ist das folgende Problem:

Gegeben: eine 3-Formel φ.

Frage: ist φ erfüllbar?

Satz 19.8

3SAT *ist* NP*-vollständig.*

Beweis.

1) 3SAT $\in$ NP folgt unmittelbar aus SAT $\in$ NP, da jedes 3SAT-Problem eine aussagenlogische Formel ist.

2) Es sei φ eine beliebige aussagenlogische Formel. Wir geben ein polynomielles Verfahren an, das φ in eine 3-Formel φ' umwandelt, so dass gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar} \quad \underline{\text{gdw}}. \quad \varphi' \text{ erfüllbar}.$$

Beachte:

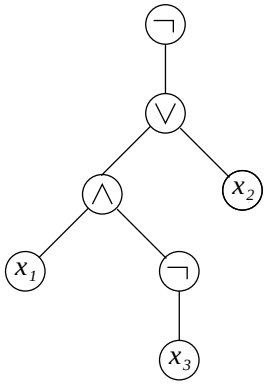
Es ist nicht gefordert, dass φ und φ' im logischen Sinne äquivalent sind, also von denselben Belegungen erfüllt werden.

Die Umformung erfolgt in mehreren Schritten, die wir am Beispiel der Formel

$$\neg((x_1 \wedge \neg x_3) \vee x_2)$$

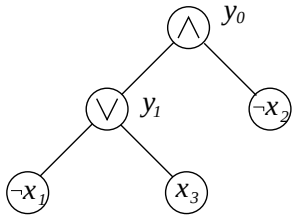
veranschaulichen.

Wir stellen diese Formel als Baum dar:



1. Schritt: Wende wiederholt die *de Morgan'schen Regeln* an und eliminiere doppelte Negationen, um die Negationszeichen zu den Blättern des Baumes zu schieben.

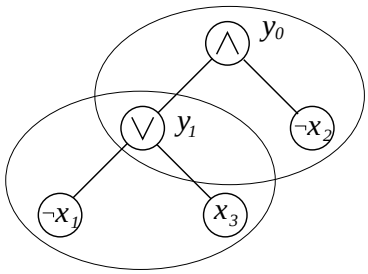
Dies ergibt den folgenden Baum (die Beschriftung y_0, y_1) wird im nächsten Schritt erklärt:



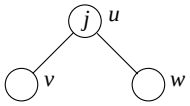
2. Schritt: Ordne jedem inneren Knoten eine neue Variable aus $\{y_0, y_1, \ldots\}$ zu, wobei die Wurzel y_0 erhält.

Intuitiv repräsentiert jede Variable y_i die Teilformel von φ, an dessen Wurzel sie steht. Zum Beispiel repräsentiert y_1 die Teilformel $\neg x_1 \vee x_3$.

3. Schritt: Fasse jede Verzweigung (gedanklich) zu einer Dreiergruppe zusammen:



Jeder Verzweigung der Form



mit $j \in \{\wedge, \vee\}$ ordnen wir eine Formel der folgenden Form zu:

$$(u \Leftrightarrow (v \; j \; w))$$

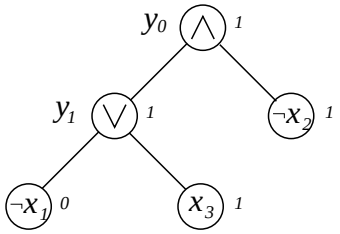
Diese Formeln werden nun konjunktiv mit y_0 verknüpft, was die Formel φ_1 liefert.

Im Beispiel ist φ_1 :

$$y_0 \wedge (y_0 \Leftrightarrow (y_1 \wedge \neg x_2)) \wedge (y_1 \Leftrightarrow (\neg x_1 \vee x_3))$$

Die Ausdrücke φ und φ_1 sind *erfüllbarkeitsäquivalent*, denn:

Eine erfüllende Belegung für φ kann zu einer für φ_1 erweitert werden, indem man die Werte für die Variablen y_i durch die Auswertung der entsprechenden Teilformel bestimmt, z.B.:



$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \\ y_1 &= 1 \\ y_0 &= 1 \end{aligned}$$

Umgekehrt ist jede erfüllende Belegung für φ_1 auch eine für φ. Genauer gesagt kann man von den Blättern zu den Wurzeln alle Variablen y_i betrachten und jeweils zeigen: der Wahrheitswert von y_i stimmt mit dem Wahrheitswert der von y_i repräsentierten Teilformel überein. Da jede Belegungm die φ_1 erfüllt, y_0 wahr machen muss, erfüllt jede solche Belegung dann auch φ.

4. Schritt: Jedes Konjunkt von φ_1 wird separat in eine 3-Formel umgeformt:

$$\begin{aligned} a \Leftrightarrow (b \vee c) &\rightsquigarrow (\neg a \vee (b \vee c)) \wedge (\neg(b \vee c) \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee a \vee a) \wedge (\neg c \vee a \vee a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \Leftrightarrow (b \wedge c) &\rightsquigarrow (\neg a \vee (b \wedge c)) \wedge (\neg(b \wedge c) \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee b) \wedge (\neg a \vee c \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man eine 3-Formel, die äquivalent zu φ_1 und damit wie gewünscht erfüllbarkeitsäquivalent zu φ ist.

Beachte:

Jeder Schritt kann offensichtlich in deterministisch in polynomieller Zeit durchgeführt werden. □

Wir verwenden nun 3SAT, um zwei weitere Probleme als NP-vollständig nachzuweisen. Dabei wählen wir exemplarisch ein graphentheoretisches Problem und ein kombinatorisches Problem auf Mengen. Bei dem graphentheoretischen Problem handelt es sich im CLIQUE, von dem wir ja bereits nachgewiesen haben, dass es in NP liegt.

Satz 19.9

CLIQUE *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es bleibt, zu zeigen, dass CLIQUE NP-hart ist. Zu diesem Zweck reduzieren wir 3SAT in polynomieller Zeit auf CLIQUE.

Sei also

$$\varphi = \overbrace{(\ell_{11} \vee \ell_{12} \vee \ell_{13})}^{K_1} \wedge \ldots \wedge \overbrace{(\ell_{m1} \vee \ell_{m2} \vee \ell_{m3})}^{K_m}$$

eine 3-Formel, mit $\ell_{ij} \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$.

Wir müssen zeigen, wie man in polynomieller Zeit aus φ einen Graph G und eine Cliquengröße k erzeugt, so dass φ erfüllbar ist gdw. G eine k-Clique hat.

Dies macht man wie folgt:

- $V := \{\langle i, j\rangle \mid 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq 3\}$
- $E := \{\{\langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle\}) \mid i \neq i' \text{ und } \ell_{ij} \neq \overline{\ell}_{i'j'}\}$, wobei

$$\overline{\ell} = \begin{cases} \neg x & \text{falls } \ell = x \\ x & \text{falls } \ell = \neg x \end{cases} .$$

- $k = m$

Die Knoten von G entsprechen also den *Vorkommen von Literalen* in φ (wenn ein Literal an mehreren Positionen in φ auftritt, so werden dafür mehrere Knoten erzeugt). Zwei Literalvorkommen werden durch eine (ungerichtete) Kante verbunden, wenn sie sich auf *unterschiedliche* Klauseln beziehen und *nicht* komplementäre Literale betreffen.

Es gilt:

	φ ist erfüllbar mit einer Belegung B
gdw.	es gibt in jeder Klausel K_i ein Literal ℓ_{ij_i} mit Wert 1
gdw.	es gibt Literale $\ell_{1j_1}, \ldots, \ell_{mj_m}$, die paarweise nicht komplementär sind (wobei ℓ_{ij_i} in Klausel i vorkommt)
gdw.	es gibt Knoten $\langle 1, j_1\rangle, \ldots, \langle m, j_m\rangle$, die paarweise miteinander verbunden sind
gdw.	es gibt eine m-Clique in G

□

Übung: Betrachte die 3-Formel

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_4),$$

konstruiere den Graph G wie im Beweis von Satz 19.9, gib eine 3-Clique in G an und die dazugehörige Belegung, die φ erfüllt.

Es folgt die angekündigte Reduktion von 3SAT auf ein mengentheoretisches Problem. Dieses Problem heißt *Mengenüberdeckung*.

Definition 19.10 (Mengenüberdeckung)

Gegeben: Ein *Mengensystem* über einer endlichen Grundmenge M, d.h.

$$T_1, \ldots, T_k \subseteq M$$

sowie eine Zahl $n \geq 0$.

Frage: Gibt es eine Auswahl von n Mengen, die ganz M überdecken, d.h.

$$\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, k\} \text{ mit } T_{i_1} \cup \ldots \cup T_{i_n} = M.$$

Satz 19.11

Mengenüberdeckung ist NP*-vollständig.*

Beweis.

1) Mengenüberdeckung ist in NP:
   - Wähle nichtdeterministisch Indices $i_1, \ldots, i_n$ und
   - überprüfe, ob $T_{i_1} \cup \ldots \cup T_{i_n} = M$ gilt.

2) Um NP-Härte zu zeigen, reduzieren wir 3SAT in Polyzeit auf Mengenüberdeckung.

   Sei also $\varphi = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-Formel, die die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält.

   Wir definieren $M := \{K_1, \ldots, K_m, x_1, \ldots, x_n\}$.

   Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

   $$T_i := \{K_j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ als Disjunkt vor}\} \cup \{x_i\}$$
   $$T_i' := \{K_j \mid \neg x_i \text{ kommt in } K_j \text{ als Disjunkt vor}\} \cup \{x_i\}$$

   Wir betrachten das Mengensystem:

   $$T_1, \ldots, T_n, T_1', \ldots, T_n',$$

   Zu zeigen: φ ist erfüllbar gdw. es eine Mengenüberdeckung von M mit n Mengen gibt.

   "$\Rightarrow$" Sei φ erfüllbar mit Belegung B. Wähle
   - T_i, falls $B(x_i) = 1$
   - T_i', falls $B(x_i) = 0$

   Dies liefert n Mengen, in denen jedes Element von M vorkommt:
   - $K_1, \ldots, K_n$ da B jede K_i erfüllt.
   - $x_1, \ldots, x_n$ da für jedes i entweder T_i oder T_i' gewählt wird.

   "$\Leftarrow$" Sei umgekehrt

   $$\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \{T_1, \ldots, T_n, T_1', \ldots, T_n'\} \text{ mit } U_1 \cup \ldots \cup U_n = M.$$

   Da jede Variable x_i in $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ ist, kommt T_i oder T_i' in $\{U_1, \ldots, U_n\}$ vor. Da wir nur n verschiedene Mengen haben, kommt sogar jeweils *genau eines* von beiden vor.

   Definiere Belegung B wie folgt:

   $$B(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_i \in \{U_1, \ldots, U_n\} \\ 0 & \text{falls } T_i' \in \{U_1, \ldots, U_n\} \end{cases}$$

   B erfüllt jede Klausel K_j da K_j in $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ vorkommt. □

Übung: Betrachte die 3-Formel

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_4),$$

konstruiere die Mengen $M, T_1, \ldots, T_4, T'_1, \ldots, T'_4$ wie im Beweis von Satz 19.8, finde Mengen $\{U_1, \ldots, U_4\} \subseteq \{T_1, \ldots, T_4, T'_1, \ldots, T'_4\}$, so dass $U_1 \cup \cdots \cup U_4 = M$ und gib die dazugehörige Belegung an, die φ erfüllt.

Es gibt eine große Vielzahl von NP-vollständigen Problemen in allen Teilgebieten der Informatik. Eine klassische Referenz ist das Buch

> „Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness“
> von M. Garey und D. Johnson, 1979.

Das Buch, welches zu den meistzitierten in der Informatik überhaupt gehört, enthält eine hervorragende Einführung in das Gebiet der NP-Vollständigkeit und einen Katalog von ca. 300 NP-vollständigen Problemen. Seit der Publikation des Buches wurden tausende weitere Probleme als NP-vollständig identifiziert.

20. Jenseits von NP

Wie erwähnt glaubt eine überwältigende Zahl von Forschern, dass P eine *echte* Teilmenge von NP ist. In der Tat kann man die Theorie der NP-Vollständigkeit als einen Anhaltspunkt werden, dass dies wirklich der Fall ist. Im Gegensatz dazu stellen sich interessanterweise die *Platz*komplexitätsklassen PSpace und NPSpace, die ja komplett analog zu P und NP definiert sind, als identisch heraus! Das folgende Resultat ist als *Savitch's Theorem* bekannt und wurde um 1970 bewiesen.

Satz 20.1

PSpace = NPSpace.

Der Beweis beruht auf einer cleveren Simulation von NTMs mittels DTMs; für Details wird auf Spezialvorlesungen zur Komplexitätstheorie verwiesen. Savitch's Theorem hat unter anderem folgende Konsequenzen:

- Die Komplexitätsklasse NPSpace wird im allgemeinen nicht explizit betrachtet;
- Wenn man nachweisen will, dass ein Problem in PSpace ist, dann kann man o.B.d.A. eine nicht-deterministische Turingmaschine verwenden, was oft praktisch ist (man kann also *raten*).

Entsprechend zur Definition von NP-Vollständigkeit eines Problems kann man auch Vollständigkeit für andere Komplexitätsklassen definieren, zum Beispiel für PSpace. Man beachte die Ähnlichkeit zu Definition 19.3.

Definition 20.2 (PSpace-hart, PSpace-vollständig)

1) Eine Sprache L heißt PSpace-*hart* wenn für *alle* $L' \in$ PSpace gilt: $L' \leq_p L$.
2) L heißt PSpace-*vollständig* wenn $L \in$ PSpace und L ist PSpace-hart.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes PSpace-vollständige Problem auch NP-hart ist. Man nimmt an, dass PSpace-vollständige Probleme echt schwieriger sind als NP-vollständige Probleme (dass also NP eine echte Teilmenge von PSpace ist), hat aber bisher keinen Beweis dafür gefunden.

Man kann beweisen, dass folgende Probleme aus dieser Vorlesung PSpace-vollständig sind:

- das Äquivalenzproblem für NEAs und für reguläre Ausdrücke
- das Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken.

Mit einem raffinierten Diagonalisierungsargument kann man nachweisen, dass P eine echte Teilmenge von ExpTime ist, dass also P $\neq$ ExpTime gilt. Man kann mit einer DTM in exponentieller Zeit also beweisbar mehr Probleme lösen als in polynomieller Zeit. Das bedeutet natürlich, dass auch mindestens eine der drei Inklusionen aus

$$\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSpace} \subseteq \mathsf{ExpTime}.$$

echt sein muss. Leider weiß man aber nicht, welche Inklusion das ist.

V. Appendix

A. Laufzeitanalyse von Algorithmen und O-Notation

Laufzeitanalyse

Ein gegebenes Berechnungsproblem lässt sich meist durch viele verschiedene Algorithmen lösen. Um die „Qualität“ dieser vielen möglichen Algorithmen zu bestimmen, analysiert man deren Ressourcenverbrauch. In diesem Zusammenhang ist die wichtigste Ressource der *Zeitverbrauch*, also die Anzahl Rechenschritte, die der Algorithmus ausführt. Andere Ressourcen, die eine Rolle spielen können, sind beispielsweise der Speicherverbrauch oder der Kommunikationsbedarf, wenn der Algorithmus auf mehreren Prozessoren oder Rechnern verteilt ausgeführt wird. Ein Algorithmus mit geringem Ressourcenbedarf ist dann einem Algorithmus mit höherem Ressourcenbedarf vorzuziehen.

Die *Laufzeit* eines Algorithmus A auf einer Eingabe x ist die Anzahl *elementarer Rechenschritte*, die A gestartet auf x ausführt, bevor er anhält. Was ein elementarer Rechenschritt ist, wird in der VL „Theoretische Informatik II“ genauer untersucht. Bis dahin betrachten wir die üblichen Operationen eines Prozessors als elementare Rechenschritte, also z.B. Addition und Multiplikation. Die zentrale Eigenschaft eines elementaren Rechenschrittes ist, dass er in konstanter Zeit ausgeführt werden kann—das soll heißen, dass die benötigte Zeit unabhängig von den konkreten Argumenten ist, auf die der Rechenschritt angewendet wird.

Man beschreibt die Laufzeit eines Algorithmus immer in Abhängigkeit von der *Größe seiner Eingabe*. Dem liegt die Intuition zugrunde, dass das Verarbeiten einer grösseren Eingabe im allgemeinen länger dauert als das einer kleinen. So kann man z.B. offensichtlich schneller entscheiden, ob ein gegebener NEA ein Eingabewort der Länge 1 akzeptiert als eines der Länge 128. Der Zeitverbrauch eines Algorithmus kann also beschrieben werden durch eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

die jeder Eingabelänge $n \in \mathbb{N}$ eine Laufzeit $f(n)$ zuordnet. Man beachte, dass diese Darstellung von der *konkreten Eingabe* abstrahiert, d.h., die Laufzeit des Algorithmus auf verschiedenen Eingaben derselben Länge wird nicht unterschieden. Diese kann durchaus sehr unterschiedlich sein: für einen gebenen NEA $\mathcal{A}$, in dem der Startzustand keine a-Übergang erlaubt, ist es trivial, zu entscheiden, dass das Wort

$$abbbababababbbbbbbbababbabbabbbbbbbbaaabbbbaaaaaab$$

nicht akzeptiert wird, wohingegen dies für das gleichlange, aber mit b beginnende Wort

bbbababababbbbbbbbababbabbabbbbbbbbaaabbbbaaaaaaba

viel mehr Schritte erfordern kann. Die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschrieben Laufzeit ist als *Worst Case Komplexität* zu verstehen: $f(n)$ beschreibt eine obere Schranke, also eine maximale Schrittzahl, die für keine Eingabe der Länge n überschritten wird (die aber für „einfache“ Eingaben unter Umständen stark *unter*schritten werden kann).

Welche Laufzeit kann als *effizient* angesehen werden und welche nicht? Die wichtigste Grenze verläuft zwischen polynomiellem und exponentiellem Laufzeitverhalten, wobei ersteres im allgemeinen mit „machbar“ gleichgesetzt wird und letzteres mit steigender Eingabegröße so schnell wächst, dass größere Eingaben nicht verarbeitet werden können. Bei *polynomieller Laufzeit* ist die Funktion f also ein Polynom wie zum Beispiel

$$n, \quad n^2, \quad 5n, \quad 7n^2, \quad 8n^3, \quad 3n^3 + 2n^2 + 5n + 7.$$

Bei *exponentieller Laufzeit* ist sie eine Exponentialfunktion wie zum Beispiel

$$2^n, \quad 5^n, \quad 2^{n^2}, \quad n^n, \quad 17(5^{23n}).$$

Es ist wichtig, sich vor Augen zu führen, dass exponentielle Laufzeit so dramatisch ist, dass sie von schnellerer Hardware nicht kompensiert werden kann. Man betrachte z.B. die Laufzeit 2^n auf Eingaben der (sehr moderaten!) Größe $n = 128$. Die sich ergebende Anzahl Schritte ist so gewaltig, dass ein moderner 3Ghz-Prozessor länger rechnen müsste als vom Anfang des Universums bis heute. Aber auch Polynome höheren Grades sind recht schnell wachsende Funktionen. Interessanterweise findet man aber nur äußerst selten Algorithmen, deren Laufzeit zwar polynomiell ist, aber nicht durch ein Polynom kleinen Grades (meist ≤ 5, oft ≤ 3) beschrieben werden kann. Dies rechtfertigt die übliche Gleichsetzung von „polynomiell“ und „machbar“. Für sehr zeitkritische Probleme kann aber auch eine Laufzeit von n^2 zu lang sein. Als besonders effizient gilt *Linearzeit*, also Laufzeiten der Form $c \cdot n$, wobei $c \in \mathbb{N}$ eine Konstante ist.

O-Notation

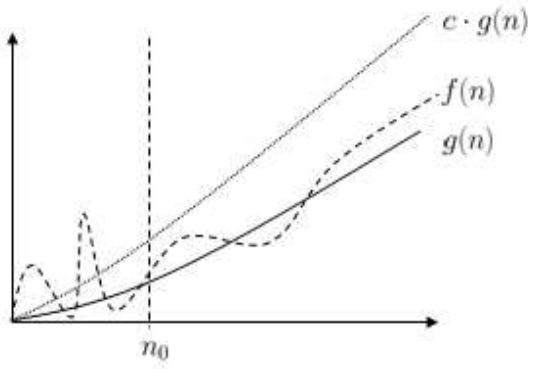
Bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen abstrahiert man so gut wie immer von konkreten Konstanten. Man würde also beispielsweise nicht zwischen einem Algorithmus mit Laufzeit $2n$ und einem mit Laufzeit $4n$ unterscheiden (außer natürlich in einer konkreten Implementierung, wo derartige Unterschiede sehr wichtig sein können!). Dies hat mehrere Gründe. Erstens ist es schwierig und fehleranfällig, alle involvierten Konstanten zu identifizieren und während der für die Laufzeitabschätzung benötigten Rechnungen „mitzuschleppen“. Und zweitens sind die konkreten Konstanten oft abhängig von Implementierungsdetails wie den konkret zur Verfügung stehenden elementaren Rechenschritten und den zur Repräsentation der Eingabe verwendeten Datenstrukturen. Die sogenannte „O-Notation“ stellt eine einfach Methode zur Verfügung, um konkrete Konstanten auszublenden.

Definition A.1 (O-Notation)
Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Wir schreiben

$$f \in O(g)$$

wenn es eine Konstante $c > 0$ und Schranke $n_0 \geq 0$ gibt, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n > n_0$.

Mit anderen Worten bedeutet $f \in O(g)$, dass f „schließlich nicht wesentlich schneller wächst“ als g. Die folgende Graphik illustriert dies anhand zweier Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ mit $f \in O(g)$:



Wie in Definition A.1 gefordert, liegt f schliesslich (d.h. ab der Schranke n_0) unterhalb der mit der Konstanten c skalierten Funktion $c \cdot g(n)$. Auch wenn der absolute Wert von $f(n)$ an vielen Stellen größer ist als der von $g(n)$, wächst f also nicht wesentlich schneller als g.

Wir verwenden die Laufzeitbeschreibung $O(f(n))$, wenn wir ausdrücken wollen, dass die Laufzeit $f(n)$ ist, bis auf Konstanten (repräsentiert durch c) und endlich viele Ausnahmen (repräsentiert durch n_0). Insbesondere beschreibt

- $O(n)$ Linearzeit;
- $O(n^2)$ quadratische Zeit und
- $\bigcup_{i \geq 1} n^i$ polynomielle Zeit.

Es existieren verscheidene Rechenregeln für die O-Notation wie zum Beispiel

- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) + O(g) = O(f + g)$ und
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$.

Mehr Informationen zur O-Notation finden sich beispielsweise im Buch „Concrete Mathematics“ von Graham, Knuth und Patashnik.

B. Aussagenlogik

Die Logik hat als Teildisziplin der Philosophie eine Tradition von mehr als zweitausend Jahren. In jüngerer Zeit spielt sie zudem eine sehr wichtige Rolle als formale Grundalge der Informatik. Am augenfälligsten ist dies wahrscheinlich im Hardwareentwurf, wo Logik in Form von Schaltkreisen große Bedeutung hat. Logik ist aber auch in vielen anderen Teilgebieten der Informatik essentiell, auch wenn dies manchmal nicht ganz offensichtlich ist. Dafür seien drei Beispiele genannt. Erstens ist die bekannte Datenbanksprache SQL im wesentlichen eine Logik mit einer benutzerfreundlichen Syntax. Zweitens ist Logik im Gebiet der Programmverifikation, wo in automatisierter Weise die Fehlerfreiheit von Programmen überprüft werden soll, als Spezifikationssprache von zentraler Bedeutung. Und drittens ist Logik ein wichtiges Werkzeug in der Komplexitätstheorie, wo sie bei der Analyse wichtiger Informatikprobleme ein vielfach verwendetes Hilfsmittel darstellt.

Es gibt viele verschiedene Arten von Logiken, die in der Informatik Verwendung finden, wie zum Beispiel die Aussagenlogik, die Prädikatenlogik erster Stufe, Prädikatenlogiken höherer Stufe und das μ-Kalkül. All diese Logiken haben recht verschiedene Eigenschaften. In dieser kurzen Einführung werden wir uns auf die Aussagenlogik beschränken, die die einfachste der genannten Logiken ist und sich in den anderen, komplexeren Logiken als elementarer „Baustein“ wiederfindet.

Die Aussagenlogik behandelt die logische Verknüpfung von atomaren Aussagen mittels sogenannter *Junktoren* wie „und“, „oder“ und „nicht“. Atomare Aussagen sind Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können und deren innere Struktur nicht weiter betrachtet wird, wie zum Beispiel „Die Erde ist ein Planet“ oder „Bremen liegt am Ganges“. Wir werden von konkreten Aussagen dieser Art abstrahieren und stattdessen mit Aussagen*variablen* arbeiten, die die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ annehmen können und die wir mit den Buchstaben x, y, z bezeichnen. Daraus lassen sich dann aussagenlogische *Formeln* bilden, die zusammengesetzte Aussagen repräsentieren, wie zum Beispiel „x und nicht y“. Der Wahrheitswert derartiger Formeln ergibt sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagenvariablen. Dies werden wir im Folgenden formal definieren. Dabei fixieren wir eine abzählbar unendliche Menge VAR von Aussagenvariablen.

Definition B.1 (Syntax Aussagenlogik)
Die *(aussagenlogischen) Formeln* sind induktiv wie folgt definiert:

- jede Aussagenvariable ist eine aussagenlogische Formel;
- wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann auch
  - $\neg\varphi$ (*Negation*),
  - $(\varphi \wedge \psi)$ (*Konjunktion*) und
  - $(\varphi \vee \psi)$ (*Disjunktion*).

Beispiele für aussagenlogische Formeln sind also

$$\neg x \qquad \neg\neg y \qquad (x \wedge \neg y) \qquad \neg(x \vee y) \wedge \neg(\neg x \vee \neg y).$$

Wir lassen die Klammern weg, wenn das Resultat eindeutig ist, wobei $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ und $\vee$. Zum Beispiel:

- Die Formel $\neg x \wedge y$ steht für $(\neg x) \wedge y$, nicht etwa für $\neg(x \wedge y)$.
- Formeln wie $x_1 \wedge y_1 \vee x_2 \wedge y_2$ sind ohne Klammern nicht erlaubt, da wir zwischen $\wedge$ und $\vee$ keine Präzedenz bzgl. der Bindungsstärke vereinbaren.

Definition B.2 (Semantik Aussagenlogik)
Eine *(aussagenlogische) Belegung* ist eine Abbildung $B : \mathsf{VAR} \to \{0, 1\}$. Belegungen werden wie folgt auf zusammengesetzte Formeln erweitert:

- $B(\neg\varphi) = 1 - \varphi$
- $B(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B(\varphi) = 1 \text{ und } B(\psi) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $B(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B(\varphi) = 1 \text{ oder } B(\psi) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Wenn $B(\varphi) = 1$, dann *erfüllt* B die Formel φ. In diesem Fall nennen wir B ein *Modell* von φ.

Intuitiv steht 1 für den Wahrheitswert „wahr“ und 0 für „falsch“. Wenn B die Variable x auf 1 abbildet, so notieren wir das auch als $x \mapsto_B 1$. Als Beispiel überlegt man sich leicht, dass folgendes gilt:

$$\text{wenn } x \mapsto_B 0,\ y \mapsto_B 1 \text{ und } z \mapsto_B 1, \text{ dann erfüllt } B \text{ die Formel } \neg(\neg x \wedge y) \vee z.$$

Man kann die Semantik der Junktoren in sehr übersichtlicher Weise in Form von *Wahrheitstafeln* darstellen:

$B(\varphi)$	$B(\neg\varphi)$
0	1
1	0

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \wedge \psi)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \vee \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

In dieser Darstellung wird sofort deutlich, dass auch andere Junktoren denkbar sind. In der Tat gibt es eine Vielzahl gebräuchlicher Junktoren. Wir definieren hier beispielhaft die folgenden:

- *Implikation* wird bezeichnet durch $(\varphi \to \psi)$

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \to \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Intuitiv bedeutet die einzige Zeile mit Ergebnis 0, dass aus einer wahren Aussage niemals eine falsche Aussage folgen kann. Umgekehrt folgt aus einer falschen Aussage aber jede beliebige Aussage, egal ob sie wahr oder falsch ist. Zur Illustration mag die Implikation „Wenn Bremen am Ganges liegt, dann ist die Erde ein Planet“ dienen, deren Wahrheitswert man intuitiv als „wahr“ empfindet, obwohl die Vorbedingung „Bremen liegt am Ganges“ falsch ist.

- *Biimplikation* wird bezeichnet durch $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \leftrightarrow \psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

  Intuitiv bedeutet $\varphi \leftrightarrow \psi$ also schlicht und einfach, dass φ and ψ denselben Wahrheitswert haben.

Im Umgang mit aussagenlogischen Formeln spielt der Begriff der logischen Äquivalenz eine wichtige Rolle.

Definition B.3 (Äquivalenz)
Zwei Formeln φ und ψ sind *äquivalent*, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen B gilt: $B(\varphi) = B(\psi)$.

Die Hinzunahme der Implikation und Biimplikation zur Aussagenlogik erhöht deren Ausdrucksstärke nicht, denn

1. $\varphi \rightarrow \psi$ ist äquivalent zu $\neg\varphi \vee \psi$ und
2. $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist äquivalent zu $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Die Gültigkeit dieser (und anderer) Äquivalenzen kann man leicht mittels Wahrheitstafeln nachweisen. Für Punkt 1 prüft man beispielsweise, dass für alle möglichen Wahrheitswerte von φ und ψ die Formeln $\varphi \rightarrow \psi$ und $\neg\varphi \vee \psi$ zum selben Wahrheitswert auswerten.

Wir verwenden im folgenden also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Implikation und Biimplikation als Junktoren der Aussagenlogik. Dabei nehmen wir an, dass $\neg, \wedge, \vee$ stärker binden als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Beispielsweise steht also $x \wedge y \rightarrow z$ für $(x \wedge y) \rightarrow z$ und nicht etwa für $x \wedge (y \rightarrow z)$. Man kann beweisen, dass die Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ ausreichend sind, um *jeden* Junktor, der durch eine Wahrheitstafel definiert werden kann, auszudrücken.

Im Folgenden sind einige weitere Äquivalenzen aufgeführt. Diese sind nützlich, um aussagenlogische Formeln umzuformen, ohne ihre Bedeutung zu verändern. Für alle Formeln

φ, ψ und ϑ gilt:

φ	$\equiv$	$\neg\neg\varphi$	Doppelte Negation
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\equiv$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	De Morgansches Gesetz
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\equiv$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	De Morgansches Gesetz
$\varphi \wedge \varphi$	$\equiv$	φ	Idempotenz von Konjunktion
$\varphi \vee \varphi$	$\equiv$	φ	Idempotenz von Disjunktion
$\varphi \wedge \psi$	$\equiv$	$\psi \wedge \varphi$	Kommutativität von Konjunktion
$\varphi \vee \psi$	$\equiv$	$\psi \vee \varphi$	Kommutativität von Disjunktion
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta$	$\equiv$	$\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta)$	Assoziativität von Konjunktion
$(\varphi \vee \psi) \vee \vartheta$	$\equiv$	$\varphi \vee (\psi \vee \vartheta)$	Assoziativität von Disjunktion
$\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta)$	$\equiv$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$	Distributivgesetz
$\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta)$	$\equiv$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \vartheta)$	Distributivgesetz

Die Assoziativgesetze erlauben es, Klammern innerhalb von mehrfachen Konjunktionen bzw. Disjunktionen wegzulassen; wir schreiben im folgenden also beispielsweise $x \wedge y \wedge z$ ohne Klammern.

Wir betrachten nun zwei wichtige Normalformen für aussagenlogische Formeln.

Definition B.4 (KNF/DNF)
Ein *Literal* ist eine Formel der Form x oder $\neg x$, wobei x eine Aussagenvariable ist. Eine aussagenlogische Formel ist in

- *konjunktiver Normalform (KNF)* wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, also die folgende Form hat:

  $$(\ell_{1,1} \vee \cdots \vee \ell_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{1,n} \vee \cdots \vee \ell_{1,m_n})$$

  wobei $\ell_{i,j}$ Literale sind;
- *disjunktiver Normalform (DNF)* wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, also die folgende Form hat:

  $$(\ell_{1,1} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{1,n} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_n})$$

  wobei $\ell_{i,j}$ Literale sind.

Eine Formel der Form $\ell_{1,1} \vee \cdots \vee \ell_{1,m_1}$ nennen wir *Klausel*.

Eine Formel in KNF ist also eine Konjunktion von Klauseln.

Satz B.5
Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.

Beweis. Sei φ eine Formel mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Zu jeder Belegung B der Variablen in φ definieren wir eine Formel

$$\vartheta_B = \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_n$$

wobei $\ell_i = x_i$ wenn $B(x_i) = 1$ und $\ell_i = \neg x_i$ wenn $B(x_i) = 0$. Seien $B_1, \ldots, B_k$ alle Belegungen der Variablen in φ, so dass $B_i(\varphi) = 1$. Setze

$$\psi := \vartheta_{B_1} \vee \cdots \vee \vartheta_{B_k}.$$

Offensichtlich ist ψ in DNF. Zudem ist ψ äquivalent zu φ:

- Angenommen, es gilt $B(\varphi) = 1$. Dann ist ϑ_B ein Disjunkt von ψ. Um zu zeigen, dass $B(\psi) = 1$, genügt es also, zu zeigen, dass $B(\vartheta_B) = 1$. Dies ist aber offensichtlich.
- Angenommen, es gilt $B(\psi) = 1$. Da ψ eine Disjunktion ist, existiert ein Disjunkt ψ_B mit $B(\psi_{B'}) = 1$. Dies bedeutet offensichtlich, dass B und B' alle Variablen in φ in identischer Weise interpretieren. Da $\psi_{B'}$ ein Disjunkt in ψ ist, gilt $B'(\varphi) = 1$ und damit $B(\varphi) = 1$.

Es bleibt, zu zeigen, dass φ auch äquivalent zu einer Formel in KNF ist. Dies geschieht in folgenden Schritten:

1. φ ist äquivalent zu $\neg\neg\varphi$;
2. in $\neg\neg\varphi$ kann die innere Teilformel $\neg\varphi$ in eine äquivalente Formel in DNF umgewandelt werden, also ist φ äquivalent zu einer Formel der Form

$$\neg(\ (\ell_{1,1} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{1,n} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_n})\ ).$$

3. Anwendung der de Morganschen Gesetze ergibt zunächst

$$\neg(\ell_{1,1} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge \neg(\ell_{1,n} \wedge \cdots \wedge \ell_{1,m_n});$$

4. nochmaliges Anwenden von de Morgan liefert die gewünschte Formel in KNF

$$(\neg\ell_{1,1} \vee \cdots \vee \neg\ell_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (\neg\ell_{1,n} \vee \cdots \vee \neg\ell_{1,m_n}).$$

□

Man beachte, dass die Umformungen im Beweis von Satz B.5 eine DNF (bzw. KNF) Formel ψ liefern, die exponentiell größer ist als die ursprüngliche Formel φ. Insbesondere kann ψ aus bis zu 2^n Disjunkten bestehen, wobei n die Anzahl der Variablen in φ ist. Es gibt zwar raffinierte Umwandlungsverfahren als das im obigen Beweis verwendete, aber ein im schlimmsten Fall exponentielles Vergrößern der Formel kann dabei (beweisbar!) nicht verhindert werden.

Die Aussagenlogik ist eine sehr einfache logische Sprache. Dennoch sind die mit dieser Logik verbundenen Entscheidungsprobleme in algorithmischer und komplexitätstheoretischer Hinsicht keineswegs trivial. Die wichtigsten dieser Probleme werden wir nun einführen.

Definition B.6 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit)
Eine Formel φ heisst

- *erfüllbar* wenn es eine Belegung B gibt, die φ erfüllt;
- *gültig* wenn φ von jeder Belegung B erfüllt wird.

Beispiele für unerfüllbare Formeln sind

$$x \wedge \neg x \qquad x \wedge \neg y \wedge (x \to y) \qquad (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

Beispiel für gültige Formeln sind

$$x \vee \neg x \qquad (x \wedge y) \leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) \qquad (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$$

Erfüllbarkeit und Gültigkeit sind in folgendem Sinn dual zueinander.

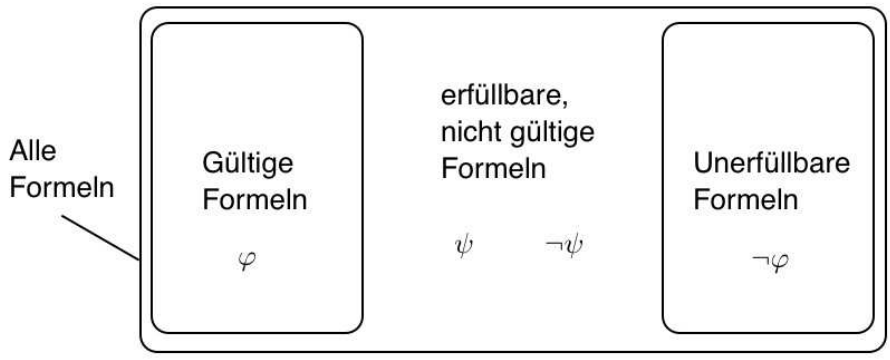
Lemma B.7
Für jede Formel φ gilt:

1. *φ ist erfüllbar gdw. $\neg\varphi$ nicht gültig ist;*
2. *φ ist gültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.*

Beweis. Zu Punkt 1:
φ ist erfüllbar
gdw. eine Belegung B existiert, die φ erfüllt
gdw. eine Belegung B existiert, die $\neg\varphi$ nicht erfüllt
gdw. $\neg\varphi$ nicht gültig.

Punkt 2 zeigt man auf ähnliche Weise. Es wird empfohlen, die Details zur Übung auszuarbeiten. □

Das folgende Bild stellt die verschiedenen Arten von Formeln anschaulich dar:



Die angekündigten Entscheidungsprobleme sind nun wie folgt.

Definition B.8 (Auswertungs-, Erfüllbarkeits-, Gültigkeitsproblem)

- *Auswertungsproblem*: gegeben eine Formel φ und eine Belegung B der Variablen in φ, entscheide, ob φ von B erfüllt wird.
- *Erfüllbarkeitsproblem*: gegeben eine Formel φ, entscheide, ob φ erfüllbar ist.
- *Gültigkeitsproblem*: gegeben eine Formel φ, entscheide, ob φ gültig ist.

Das Auswertungsproblem läßt sich recht effizient lösen. Insbesondere legt die Semantik der Aussagenlogik in Definition B.2 unmittelbar einen rekursive Algorithmus nahe. Um beispielsweise die Formel $\varphi \wedge \psi$ auszuwerten, wertet man rekursiv die Formeln φ und ψ aus und kombiniert das Ergebnis gemäß der Wahrheitstabelle für Konjunktion. Dieser Algorithmus benötigt offensichtlich nur polynomiell viel Zeit. Es gilt also folgendes.

Satz B.9

Das Auswertungsproblem der Aussagenlogik kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

Das Erfüllbarkeits- und das Gültigkeitsproblem sind von gänzlich anderer Natur. Einen naiven Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem erhält man, indem man alle Belegungen B für die Variablen in der Eingabeformel aufzählt und für jede Belegung (in polynomieller Zeit) prüft, ob sie φ erfüllt. Da es exponentiell viele Belegungen gibt, ist das aber offensichtlich kein Polynomialzeitalgorithmus. Es ist auch nicht bekannt, ob es einen Polynomialzeitalgorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem gibt; man vermutet aber, dass das nicht der Fall ist (dasselbe gilt für das Gültigkeitsproblem). Das ist sogar dann der Fall, wenn die Erfüllbarkeit von Formeln in KNF entschieden werden soll oder die Gültigkeit von Formeln in DNF. Wir werden das im Kapitel über Komplexitätstheorie weiter diskutieren.

Im folgenden beobachten wir noch kurz, dass die umgekehrten Fälle, also die Erfüllbarkeit von Formeln in DNF und die Gültigkeits von Formeln in KNF, leicht in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

Satz B.10

1. *Eine DNF-Formel ist erfüllbar gdw. es ein Disjunkt gibt, das keine Literale der Form $x, \neg x$ enthält.*
2. *Eine KNF-Formel ist gültig gdw. jedes Konjunkt zwei Literale der Form $x, \neg x$ enthält.*

Den sehr einfachen Beweis dieses Satzes lassen wir als Übung.

Abkürzungsverzeichnis

bzw. ..... beziehungsweise
DEA ..... deterministischer endlicher Automat
d.h. ..... das heißt
DTM ..... deterministische Turingmaschine
EBNF ..... erweiterte Backus-Naur-Form
etc. ..... et cetera
gdw. ..... genau dann wenn
geg. ..... gegeben
i.a. ..... im allgemeinen
LBA ..... linear beschränkter Automat
MPKP ..... modifiziertes Postsches Korrespondenzproblem
NEA ..... nichtdeterministischer endlicher Automat
NP ..... nichtdeterministisch polynomiell
NTM ..... nichtdeterministische Turingmaschine
o.B.d.A. ..... ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit
PDA ..... pushdown automaton (Kellerautomat)
dPDA ..... Deterministischer Kellerautomat
PKP ..... Postsches Korrespondenzproblem
PL1 ..... Prädikatenlogik erster Stufe
SAT ..... satisfiability problem (Erfüllbarkeitstest der Aussagenlogik)
TM ..... Turingmaschine (allgemein)
u.a. ..... unter anderem
URM ..... unbeschränkte Registermaschine
vgl. ..... vergleiche
z.B. ..... zum Beispiel
□ ..... was zu beweisen war (q.e.d)

Mathematische Symbole und Notation

$\{, \}$ ..... Mengenklammern
$x \in M$ ..... x ist Element der Menge M
$M_1 \subseteq M_2$ ..... M_1 Teilmenge von M_2
$M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subsetneq M_2$ ..... M_1 *echte* Teilmenge von M_2
$\emptyset$ ..... leere Menge
$M_1 \cup M_2$ ..... Vereinigung von Mengen M_1 und M_2
$M_1 \cap M_2$ ..... Schnitt von Mengen M_1 und M_2
$M_1 \setminus M_2$ ..... Mengendifferenz: M_1 ohne die Elemente von M_2
$\overline{M}$ ..... Komplement der Menge M
..... (bezüglich einer als bekannt angenommenen "Gesamtmenge")
$M_1 \times M_2$ ..... Kreuzprodukt der Mengen M_1 und M_2
$|M|$ ..... Kardinalität der Menge M (Anzahl Elemente)
2^M ..... Potenzmenge von M (Menge aller Teilmengen)
$\wedge$ ..... logisches "und"
$\vee$ ..... logisches "oder"
$\neg$ ..... logisches "nicht"
$\Rightarrow$ (auch $\rightarrow$) ..... logisches "impliziert"
$\Leftrightarrow$ (auch $\leftrightarrow$) ..... logisches "genau dann, wenn"
$\mathbb{N}$ ..... Menge der natürlichen Zahlen
$f : M \rightarrow M'$ ..... Funktion f bildet von Menge M in Menge M' ab
$n!$ ..... n Fakultät
$f \in O(g)$ ..... Funktion f wächst schließlich nicht schneller als Funktion g
$f|_D$ ..... Einschränkung der Funktion f auf Definitionsbereich D
$\sim$ ..... Äquivalenzrelation

Σ ..... Alphabet (oft auch: Eingabealphabet)
a, b, c ..... Alphabetssymbole
w, u, v, x, y, z ..... Wörter
ε ..... leeres Wort
a^n ..... Wort, das aus n mal dem Symbol a besteht
$|w|$ ..... Länge des Wortes w
$|w|_a$ ..... Anzahl Vorkommen des Symbols a im Wort w
$w_1 \cdot w_2$ ..... Konkatenation der Wörter w_1 und w_2
L ..... formale Sprache
$L_1 \cdot L_2$ ..... Konkatenation der Sprachen L_1 und L_2
L^i ..... i-fache Konkatenation der Sprache L mit sich selbst
L^* ..... Kleene Stern, angewendet auf die Sprache L
L^+ ..... $= L \cdot L^*$

$\mathcal{A}$ ..... Automat (DEA, NEA, Kellerautomat, LBA, Turingmaschine)
Q ..... Zustandsmenge
F ..... Endzustandsmenge
q, p ..... Zustände von Automaten
q_0 ..... Startzustand von Automat
δ ..... Übergangsfunktion von deterministischen Automaten
Δ ..... Übergangsrelation von nichtdeterministischen Automaten / Turingmaschinen
$L(\mathcal{A})$ ..... Vom Automaten $\mathcal{A}$ erkannte Sprache
$p \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q$ ..... NEA $\mathcal{A}$ kann in einem Schritt unter Lesen von Symbol a
..... von Zustand p in Zustand q übergehen
$p \overset{w}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q$ ..... NEA $\mathcal{A}$ kann unter Lesen von Wort w
..... von Zustand p in Zustand q übergehen
$p \overset{i}{\Longrightarrow}_{\mathcal{A}} q$ ..... NEA $\mathcal{A}$ kann in i Schritten
..... von Zustand p in Zustand q übergehen
r, s ..... reguläre Ausdrücke

$r \cdot s$ ..... regulärer Ausdruck für Konkatenation
$r + s$ ..... regulärer Ausdruck für Vereinigung
r^* ..... regulärer Ausdruck für Kleene Stern
Reg_Σ ..... Menge aller regulärer Ausdrücke über Σ

$q \sim_{\mathcal{A}} q'$ ..... Zustände q und q' sind $\mathcal{A}$-äquivalent
$[q]_{\mathcal{A}}$ ..... Äquivalenzklasse von Zustand q bzgl. $\sim_{\mathcal{A}}$

$\simeq_L$ ..... Nerode-Rechtskongruenz für Sprache L
$[u]_L$ ..... Äquivalenzklasse von Wort u bzgl. $\simeq_L$
$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$ ..... Die DEAs $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ sind isomorph

G ..... Grammatik
N ..... Menge der nichtterminalen Symbole einer Grammatik
P ..... Menge der Regeln (Produktionen) einer Grammatik
A, B, C ..... Nichtterminale Symbole
S ..... Startsymbol
$u \longrightarrow v$ ..... Produktion einer Grammatik
$x \vdash_G y$ ..... Wort y aus Wort x in Grammatik G in einem Schritt ableitbar
$x \vdash_G^i y$ ..... Wort y aus Wort x in Grammatik G in i Schritten ableitbar
$x \vdash_G^* y$ ..... Wort y aus Wort x in Grammatik G ableitbar
$L(G)$ ..... von Grammatik G erzeugt Sprache
$\mathcal{L}_0$ ..... Klasse der Sprachen vom Typ 0
$\mathcal{L}_1$ ..... Klasse der kontextsensitiven Sprachen (Typ 1)
$\mathcal{L}_2$ ..... Klasse der kontextfreien Sprachen (Typ 2)
$\mathcal{L}_3$ ..... Klasse der regulären Sprachen (Typ 3)

Γ ..... Kelleralphabet (Kellerautomat), Bandalphabet (Turingmaschine)
Z_0 ..... Kellerstartsymbol
$k \vdash_{\mathcal{A}} k'$ ..... Kellerautomat / Turingmaschine $\mathcal{A}$ kann in einem Schritt von ..... Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen
$k \vdash_{\mathcal{A}}^i k'$ ..... Kellerautomat / Turingmaschine $\mathcal{A}$ kann in i Schritten von ..... Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen
$k \vdash_{\mathcal{A}}^* k'$ ..... Kellerautomat / Turingmaschine $\mathcal{A}$ kann von Konfiguration k in ..... Konfiguration k' übergehen
$\mathcal{L}_2^d$ ..... Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen

$\not b$ ..... Blank Symbol (Turingmaschine)
$\$, \not\in$ ..... Bandendesymbole (LBA)

Griechische Buchstaben

Kleinbuchstaben und einige typische Verwendungen im Skript

α ..... alpha
β ..... beta
γ ..... gamma
δ (bezeichnet meist Übergangsfunktion) ..... delta
ε (bezeichnet meist das leere Wort) ..... epsilon
ζ ..... zeta
η ..... eta
θ (manchmal auch ϑ) ..... theta
ι ..... iota
κ ..... kappa
λ ..... lambda
μ ..... mu
ν ..... nu
ξ xi
o ..... o
π (bezeichnet meist Pfad in NEA) ..... pi
ρ ..... rho
σ ..... sigma
τ ..... tau
υ ..... upsilon
φ (manchmal auch ϕ) ..... phi
ψ ..... psi
χ ..... chi
ω ..... omega

Großbuchstaben und einige typische Verwendungen im Skript

Γ (bezeichnet meist Keller- bzw. Bandalphabet) ..... Gamma
Δ (bezeichnet meist Übergangsrelation) ..... Delta
Θ ..... Theta
Λ ..... Lambda
Π ..... Pi
Ξ Xi
Σ (bezeichnet meist Alphabet) ..... Sigma
Υ ..... Upsilon
Φ ..... Phi
Ψ ..... Psi
Ω ..... Omega

Die restlichen griechischen Buchstaben existieren nicht als Großbuchstaben.

Literaturverzeichnis

[Koz06] Dexter Kozen. *Automata and Computability.* Springer Verlag, 2007

[Hop06] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullmann. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Dritte Ausgabe. Addison Wesley, 2006

[Schö97] Uwe Schöning. *Theoretische Informatik – kurzgefaßt.* Spektrum Akademischer Verlag, 1997

[Wege93] Ingo Wegener. *Theoretische Informatik.* Teubner-Verlag, 1993