Lemma zur Nicht-Ausdrückbarkeit von Zusammenhang.

Beweis per Induktion über i.

Anfang: für $i = 0$ ist $(*)$ trivial erfüllt.

Schritt:

Wir nehmen an, dass Spoiler im $i+1$-ten Zug ein Element $a = a_{i+1} \in A$ wählt. Die Wahl eines $b = b_{i+1} \in B$ kann symmetrisch behandelt werden.
Unterscheide zwei Fälle:

1. Es gibt $a_h \in \{a_1, \ldots, a_i\}$ mit $d(a_h, a) \leq 2^{k-(i+1)}$. ($(*)$-Schwelle für $i+1$)

   Betrachte die Nachbarschaften $N_{2^{k-i}}(a_h)$ und $N_{2^{k-i}}(b_h)$. IV liefert für alle $a_j, a_\ell \in \{a_1, \ldots, a_i\}$:

   (I) $a_j \in N_{2^{k-i}}(a_h)$ gdw. $b_j \in N_{2^{k-i}}(b_h)$

   (II) wenn $a_j, a_\ell \in N_{2^{k-i}}(a_h)$, dann $d(a_j, a_\ell) = d(b_j, b_\ell)$.

   Also gibt es Bijektion von $N_{2^{k-i}}(a_h)$ auf $N_{2^{k-i}}(b_h)$, die jedes $a_j \in N_{2^{k-i}}(a_h)$, $j \in \{1, \ldots, i\}$, auf das entsprechende b_j abbildet. Es gilt $a \in N_{2^{k-i}}(a_h)$. Sei b das Bild von a unter der Bijektion. Dann gilt für alle $a_j \in \{a_1, \ldots, a_i\}$:

   (III) wenn $a_j \in N_{2^{k-i}}(a_h)$, dann $d(a_j, a) = d(b_j, b)$.

   Duplikator wählt dieses b als b_{i+1}. Zu zeigen: für alle $a_j \in \{a_1, \ldots, a_i\}$ gilt:
   $$d(a_j, a) = d(b_j, b) \text{ oder } d(a_j, a), d(b_j, b) > 2^{k-(i+1)}.$$

   Unterscheide 2 Fälle:

   (a) $a_j \in N_{2^{k-i}}(a_h)$. Folgt direkt aus (III).

   (b) $a_j \notin N_{2^{k-i}}(a_h)$.
   Offensichtlich gilt $d(a_j, a_h) \leq d(a_j, a) + d(a, a_h)$. Also auch

   $$\begin{aligned} d(a_j, a) &\geq d(a_j, a_h) - d(a, a_h) \\ &> 2^{k-i} - 2^{k-(i+1)} \qquad \text{(denn } d(a_j, a_h) > 2^{k-i} \text{ und } d(a, a_h) \leq 2^{k-(i+1)}\text{)} \\ &= 2^{k-(i+1)} \end{aligned}$$

   Nach (I) gilt $b_j \notin N_{2^{k-i}}(b_h)$. Mit (III) auch $d(b, b_h) \leq 2^{k-(i+1)}$. Wir können also ganz analog zeigen, dass $d(b_j, b) > 2^{k-(i+1)}$.

2. Es gibt kein $a_h \in \{a_1, \dots, a_i\}$ mit $d(a_h, a) \leq 2^{k-(i+1)}$.

   Wir zeigen: es gibt ein $b \in B$ so dass $d(b_j, b) > 2^{k-(i+1)}$ für alle $j \in \{1, \dots, i\}$. Wählt Duplikator dieses b als b_{i+1}, so ist $(*)$ offensichtlich erfüllt.

   Seien $b_{r_1}, \dots, b_{r_i}$ die Elemente von $\{b_1, \dots, b_i\}$, die auf dem ersten Kreis in B liegen, geordnet in der Reihenfolge auf dem Kreis. Angenommen, es gibt kein b wie beschrieben. Dann gilt

$$d(b_{r_\ell}, b_{r_{\ell+1}}) \leq 2^{k-i} \text{ für } 1 \leq \ell \leq i, \text{ wobei } b_{r_{i+1}} = b_{r_1}.$$

   Also hat der Kreis höchstens

$$i \cdot 2^{k-i} = 2^{k-i+\log(i)} < 2^k$$

   Knoten. Widerspruch.