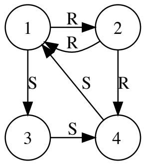
AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

3. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 1: 24%

Gegeben sei die folgende Struktur $\mathfrak{A}$ über der Signatur $\tau = \{R, S\}$, wobei R und S binäre Relationssymbole sind:



(a) Gib für jeden der folgenden Sätze φ_i an, ob $\mathfrak{A} \models \varphi_i$.

(i) $\varphi_1 = \forall x \exists y\, (\, R(x,y) \vee S(x,y)\,)$

(ii) $\varphi_2 = \exists y \forall x\, (\, R(x,y) \vee S(x,y)\,)$

(iii) $\varphi_3 = \exists x \exists y \exists z \exists u\, (\, R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,u) \wedge R(u,x)\,)$

(iv) $\varphi_4 = \forall x \forall y \forall z\, (\, (\, R(x,y) \wedge R(y,z)\,) \rightarrow x = z\,)$

(b) Gib eine Formel $\varphi(x)$ an so dass

(i) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{1, 2\}$

(ii) $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi(x)$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \{2, 3\}$

Aufgabe 2: 27%

Betrachte die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ aus der Vorlesung. Gib FO-Formeln an, die die folgenden Aussagen beschreiben:

(a) es gibt beliebig große Abstände zwischen Primzahlen;

(b) jede gerade Zahl außer der 2 ist als Summe zweier Primzahl darstellbar (Goldbachsche Vermutung)

(c) für jede Zahl x und jede Primzahl y, so dass x nicht durch y teilbar ist, gilt $x^y \equiv x \mod y$ (kleiner Satz von Fermat)

Die in der Vorlesung eingeführten Abkürzungen $\mathrm{Prim}(x)$ und $x > y$ dürfen verwendet werden. Es kann hilfreich sein, eigene Abkürzungen hinzuzufügen.

Aufgabe 3: 24%

Betrachte nochmals die Struktur $\mathfrak{A}$ aus Aufgabe 2. Verwende den Auswertungsalgorithmus für Prädikatenlogik, um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

(a) $\mathfrak{A}, \beta_1 \models \exists x.R(x,y)$ mit $\beta_1(y) = 1$

(b) $\mathfrak{A}, \beta_2 \models \forall y.(R(x,y) \vee S(x,y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

Aufgabe 4: 25%

Ein *Baum* hat die Form $B = (V, w, <)$. Dabei ist V die (endliche oder unendliche) Knotenmenge, $w \in V$ die *Wurzel* von B und $< \subseteq V \times V$ die Nachfolgerrelation. Ein *Pfad* in B ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Knoten $v_0, v_1, \ldots$ so dass $v_0 = w$ und $v_i < v_{i+1}$ für alle $i \geq 0$. Für jeden Knoten $v \in V$ muss es in B genau einen Pfad von w nach v geben.

Königs Lemma. Sei $B = (V, w, <)$ ein Baum mit unendliche vielen Knoten in dem jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, also $\{v' \in V \mid v < v'\}$ eine endliche Menge ist für jedes $v \in V$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad in B.

Beweise Königs Lemma durch Anwendung des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik. Verwende dabei eine unendliche Formelmenge Γ der folgenden Art:

- Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es eine Variable x_v.
- Sei $V_i = \{v \in V \mid w <^i v\}$ die Menge aller Knoten in B mit Abstand i zur Wurzel. Man zeigt leicht, dass V_i endlich und nicht leer ist für jedes $i \geq 0$ (diese Aussage darf verwendet werden)
- Wähle Γ derart, dass jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist und dass Γ genau dann erfüllbar ist, wenn B einen unendlichen Pfad besitzt.

Aufgabe 5: 24% (Zusatzaufgabe)

Das Spektrum eines FO-Satzes φ ist die Menge aller natürlichen Zahlen n, so dass φ ein Modell mit einem Universum der Größe n besitzt. Zeige:

(a) $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines FO-Satzes

(b) $\{2\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.

(c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$ ist das Spektrum eines FO-Satzes.