AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel. 0421/218-64431

Logik

Aufgabenblatt 2

Abgabe und Besprechung: Mi., 6.11.2013

Aufgabe 1 (*24 Prozent*)

Beweise die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

a) Eine DNF-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Disjunkt enthält, in dem nicht sowohl x als auch $\neg x$ vorkommen.

b) Eine KNF-Formel ist genau dann gültig, wenn jedes Konjunkt zwei Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

Aufgabe 2 (*24 Prozent*)

Beweise die folgenden Aussagen. Verwende dabei die Definition von "$\models$" und die Semantik der Junktoren.

a) $\psi \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \models \varphi$

b) Wenn $\varphi \wedge \psi \models \vartheta$ und $\varphi \wedge \neg\psi \models \vartheta$, dann gilt $\varphi \models \vartheta$.

c) $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\varphi \rightarrow \psi$ gültig ist.

d) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\varphi \models \neg\psi$, dann ist φ unerfüllbar.

Aufgabe 3 (*24 Prozent*)

a) Wende Resolution an, um für die folgende Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist:

$$(x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Gib im Fall von Unerfüllbarkeit einen Resolutionsbeweis für $\Box$ an.

b) Verwende den Polyzeit-Algorithmus für Erfüllbarkeit von Hornformeln um festzustellen, ob die Formel

$$x_1 \wedge (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_1 \wedge x_4 \rightarrow x_3) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rightarrow 0) \wedge x_4$$

erfüllbar ist. Verifiziere dein Ergebnis durch Berechnen von $\mathrm{ERes}^*(M)$ für eine geeignete Klauselmenge M.

Aufgabe 4 (*28 Prozent*)

a) Gib eine Familie von Hornklauseln $(M_n)_{n\geq 1}$ an, so dass $|M_n|$ höchstens polynomiell in n wächst, $|\mathrm{ERes}^*(M_n)|$ jedoch nicht polynomiell in n wächst.

b) Um einen Polynomialzeitalgorithmus aus dem Resolutionssatz für Einheitsresolution abzuleiten, modifizieren wir die Funktion ERes. Dafür legen wir eine lineare Ordnung $<$ auf den Variablen fest, d. h. $x_1 < x_2 < \ldots$. Eine Klausel C ist eine *minimale Einheitsresolvente von* M, wenn

- sie eine Einheitsresolvente von zwei Klauseln C_1, C_2 aus M ist mit $C_1 = \{x_i\}$, und
- es kein $\neg x_j \in C_2$ gibt mit $x_j < x_i$.

Wir definieren nun die Funktion OERes durch

$$\mathrm{OERes}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ minimale Einheitsresolvente von } M\}$$

und definieren $\mathrm{OERes}^i(M)$ sowie $\mathrm{OERes}^*(M)$ analog zu $\mathrm{Res}^i(M)$ und $\mathrm{Res}^*(M)$ aus der Vorlesung. Man kann leicht zeigen, dass der Resolutionssatz für Einheitsresolution auch für die modifizierte Funktion OERes^* gilt.

Zeigen Sie nun, dass $|\mathrm{OERes}^*(M)|$ polynomiell von $|M|$ abhängt und dass auch die Berechnung von $\mathrm{OERes}^*(M)$ in Polynomialzeit möglich ist.

Aufgabe 5 (*25 Prozent, Zusatzaufgabe*)

Zeige, dass es zu jeder Formel φ eine Formel ψ in KNF gibt, so dass gilt: φ ist erfüllbar genau dann, wenn ψ erfüllbar ist. Weiterhin ist die Länge von ψ *linear* in der Länge von φ.

Beachte: Es wird keine Äquivalenz von φ und ψ gefordert.

Hinweis: Stelle φ als Syntaxbaum dar. Die atomaren Formeln in ψ bestehen aus denjenigen von φ sowie zusätzlichen atomaren Formeln für jeden inneren Knoten des Baums.