Dr. Stefan Göller Wintersemester 2012/2013

Logik

Aufgabenblatt 5

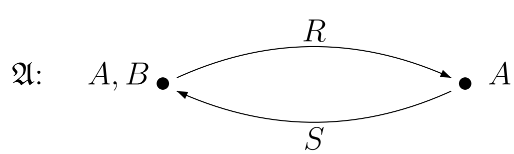
Besprechung und Abgabe: 10.1.2013

---

1. (25%) Beweise, dass für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ über einer Signatur τ die FO-Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ endlich axiomatisierbar ist.

Hinweis: Verallgemeinere das folgende Beispiel. Für die abgebildete τ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\tau = \{R, S, A, B\}$ wobei R,S zweistellige und A,B einstellige Relationssymbole sind definiert man die FO-Formel $\phi_{\mathfrak{A}}$ als

$$\begin{aligned}\phi_{\mathfrak{A}} = \exists x_1.\exists x_2.(x_1 \neq x_2 \wedge \forall x.(x = x_1 \vee x = x_2) \wedge \\ A(x_1) \wedge B(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \neg B(x_2) \wedge \\ R(x_1, x_2) \wedge \neg R(x_1, x_1) \wedge \neg R(x_2, x_2) \wedge \neg R(x_2, x_1) \wedge \\ S(x_2, x_1) \wedge \neg S(x_1, x_1) \wedge \neg S(x_2, x_2) \wedge \neg S(x_1, x_2))\end{aligned}$$



Die Formel $\phi_{\mathfrak{A}}$ hat (bis auf Isomorphie) nur ein Modell und die Menge $\{\phi_{\mathfrak{A}}\}$ ist eine endliche Axiomatisierung von $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

2. ($25\% = 15\% + 10\%$)

a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

(i) $\phi, (\psi \vee \vartheta) \Rightarrow (\phi \wedge \psi), (\phi \wedge \vartheta)$

(ii) $(\phi_1 \vee \neg\psi), (\phi_2 \vee \psi) \Rightarrow \phi_1, \phi_2$

(iii) $\forall y.(\neg R(a, y) \vee R(a, f(y))), R(a, a) \Rightarrow R(a, f(f(a)))$

b) Zeige, dass für die Korrektheit der Regel ($\Rightarrow \forall$) die Bedingung "c nicht in $\Gamma, \Delta, \phi(x)$" wichtig ist. Gib dafür einen SK-Beweis einer *nicht* gültigen Sequenz an, der die Regel ($\Rightarrow \forall$) anwendet, ohne auf die Bedingung zu achten.

3. (25%) Man kann den Sequenzenkalkül um Regeln erweitern, um Beweise abzukürzen. Dafür ist es notwendig, dass die hinzugenommenen Regeln korrekt sind, sonst könnte man Formeln ableiten, die keine Tautologien sind. Entscheide, ob die folgenden Regeln korrekt sind. Falls ja, gib einen Beweis äehnlich wie im Korrektheitsbeweis des SK an. Falls die Regel nicht korrekt ist, gib ein Gegenbeispiel an.

a) $\dfrac{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \phi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$

b) $\dfrac{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \phi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2}$

c) $\dfrac{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \neg\phi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \phi}$

d) $\dfrac{\Gamma, \exists x.\psi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x.\phi(x)}{\Gamma, \forall x.\psi(x) \Rightarrow \Delta, \exists x.\phi(x)}$

4. (25%) Sei τ eine endliche Signatur. Es ist bekannt, dass die Menge der FO(τ)-Sätze rekursiv aufzählbar ist.

a) Zeige, dass die Menge aller endlichen τ-Strukturen rekursiv aufzählbar ist.

b) Verwende (a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO(τ)-Sätze, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.

c) Verwende Trakhtenbrots Theorem, um zu beweisen, dass die Menge aller FO(τ)-Sätze, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.