Dr. Stefan Göller Wintersemester 2012/2013

Logik

Aufgabenblatt 3

Besprechung und Abgabe: 27.11.2012

---

1. (10%) Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2) des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik.

2. (20%) Ein *gerichteter Baum* ist ein Tripel $B = (V, w, <)$, wobei V eine Menge von Knoten, $w \in V$ die *Wurzel* und $<$ eine binäre Relation über V ist so dass für jedes $v \in V$ ein *eindeutiger* Pfad $v_0, \ldots, v_n$ ($n \geq 0$) existiert mit $v_0 = w$, $v_n = v$ und $v_i < v_{i+1}$ für alle $0 \leq i < n$.

Königs Lemma. Sei $B = (V, w, <)$ ein gerichteter Baum, sei V abzählbar unendlich und sei $\{v' \in V \mid v < v'\}$ eine endliche Menge für jedes $v \in V$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad $v_0, v_1, v_2 \ldots$ in B (d.h. $v_0 = w$ und $v_i < v_{i+1}$ für alle $i \geq 0$.

Beweisen Sie Königs Lemma durch Anwendung des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik. Beachten Sie dabei folgende Hinweise für Ihre Formelmenge Γ:

- Führen Sie für jeden Knoten $v \in V$ eine Variable x_v ein.
- Sei $V_i = \{v \in V \mid w <^i v\}$ die Menge aller Knoten in B mit Abstand i zur Wurzel. Man beachte, dass V_i endlich ist für jedes $i \geq 0$.
- Wählen Sie Γ derart, dass jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist und dass Γ genau dann erfüllbar ist, wenn B einen unendlichen Pfad besitzt.

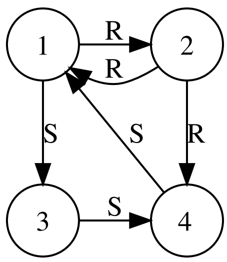
3. (30%=15% + 15%) Sei $\tau = \{<\}$ eine relationale Signatur, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist. Gib jeweils eine FO(τ)-Formel für die folgenden Eigenschaften an.

- $<$ ist reflexiv
- $<$ ist antisymmetrisch
- $<$ hat ein kleinstes Element
- $<$ ist *linear*, d.h. für beliebige Elemente a, b gilt entweder $a = b$, $a < b$, oder $a > b$.
- $<$ ist *dicht*, d.h. zwischen zwei beliebigen Elemente existiert immer noch ein weiteres

a) Welche der Sätze sind erfüllt in den Strukturen $\mathfrak{R}_<$ bzw. $\mathfrak{N}_<$ (aus der Vorlesung)?

b) Sei nun $\mathfrak{P} = (P, <^P)$ mit $P = 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge der natürlichen Zahlen) und $<^P = \{(N, M) \mid N \subseteq M\}$ (Teilmengenrelation). Welche der Sätze gelten in $\mathfrak{P}$? Gib jeweils eine kurze Begründung an.

4. (25%=15% + 10%) Gegeben sei der folgende gerichtete, kantenbeschriftete Graph $G = (V, R, S)$, wobei R bzw. S genau die mit R bzw. S beschrifteten Kanten sind.



a) Verwende den Auswertungsalgorithmus der Prädikatenlogik, um zu entscheiden, ob folgende Modellbeziehungen gelten:

- $G, \beta_1 \models \exists x. R(x, y)$ mit $\beta_1(y) = 1$
- $G, \beta_2 \models \forall y. (R(x, y) \lor S(x, y))$ mit $\beta_2(x) = 2$

b) Gib eine Formel $\phi(x)$ an, für die $G, \beta \models \phi(x)$ genau dann gilt, falls $\beta(x) \in \{1, 2\}$

5. (15%) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für FO.