AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Komplexitätstheorie“

Aufgabe 6: 25%

Eine *zweiseitige deterministische Turingmaschine (2DTM)* ist eine DTM, deren Band in beide Richtungen unendlich ist. Sie beginnt mit dem Kopf auf dem ersten Symbol der Eingabe. Das Symbol $\triangleright$ wird nicht verwendet und das Band ist sowohl links als auch rechts der Eingabe mit $\perp$ beschriftet. Akzeptanz ist wie bei normalen DTMs definiert.

Zeige, dass jede Sprache, die von einer t-zeitbeschränkten 2DTM M akzeptiert wird auch von einer $\mathcal{O}(t)$-zeitbeschränkten DTM M' akzeptiert wird, für alle $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $t(n) \geq n$. Beschreibe die generelle Idee und gib die Konstruktionsvorschrift für M' an, also die exakte Definition der Zustände, Alphabete und Übergänge basierend auf der ursprünglichen 2DTM M.

Hinweis: Mehrere Spuren auf einem Band können auch hier helfen.

Aufgabe 7: 25%

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat (NEA) heißt *azyklisch (ANEA)* wenn seine Übergangsrelation azyklisch ist, d.h. es gibt keine Folge $a_0, \ldots, a_{n-1}$ von Symbolen und $q_0, \ldots, q_n$ von Zuständen so dass $q_0 = q_n$ und

$$(q_1, a_i, q_{i+1}) \in \Delta \text{ für alle } i < n.$$

Beweise, dass das folgende Problem in NP ist: gegeben ANEAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, gilt $L(\mathcal{A}_1) \not\subseteq L(\mathcal{A}_2)$?

Aufgabe 8: 26%

Für eine Sprache L ist $L_0 = \{\varepsilon\}$, $L_{i+1} = L_i \cdot L$ für alle $i \geq 0$ und $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L_i$. Beweise:

(a) Wenn $L \in \mathsf{P}$, dann $L^* \in \mathsf{P}$;

(b) Wenn $L \in \mathsf{NP}$, dann $L^* \in \mathsf{NP}$.

Es genügt, Algorithmen in Pseudocode (und nicht als TM) anzugeben.

Hinweis: für (a) hilft dynamische Programmierung.

Aufgabe 9: 24%

Beweise die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) $B \in \mathrm{P}$ and $A \leq_p B$ implies $A \in \mathrm{P}$;

(b) $B \in \mathrm{NP}$ and $A \leq_p B$ implies $A \in \mathrm{NP}$;

(c) $A \leq_p B$ and $B \leq_p C$ implies $A \leq_p C$.

Aufgabe 10: 25% (Zusatzaufgabe)

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ verwenden wir die Unärdarstellung $\mathsf{UN}(A) := \{1^n \mid n \in A\}$ und die Binärdarstellung $\mathsf{BIN}(A) := \{\mathsf{bin}(n) \mid n \in A\}$. Zeige, dass für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{UN}(A) \in \mathsf{P} \text{ gdw. } \mathsf{BIN}(A) \in \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}).$$

Es genügt hier, Algorithmen als Pseudocode anzugeben.

Hinweis: Man soll Unär- und Binärdarstellung ja wechselseitig umwandeln können.