AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

5. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 21: 25 Prozent

Man kann den Sequenzenkalkül um Regeln erweitern, um Beweise abzukürzen. Dafür ist es notwendig, dass die hinzugenommenen Regeln korrekt sind, sonst könnte man Formeln ableiten, die keine Tautologien sind. Entscheide, ob die folgenden Regeln korrekt sind:

(a) $\dfrac{\Gamma, \exists x.\psi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x.\varphi(x)}{\Gamma, \forall x.\psi(x) \Rightarrow \Delta, \exists x.\varphi(x)}$

(b) $\dfrac{\Gamma, \forall x.(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta\varphi(c)}$

(c) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}$

(d) $\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$

(e) $\dfrac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2}$

Aufgabe 22: 25 Prozent

Offensichtlich sind die FO-Formeln

(a) $\exists x.P(x) \rightarrow \forall y.P(y)$

(b) $\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x) \rightarrow \exists y.(P(y) \wedge Q(y))$

keine Tautologien. Aus dem Vollständigkeitssatz des SK folgt, dass die Sequenzen

(a) $\exists x.P(x) \Rightarrow \neg\exists y.\neg P(y)$

(b) $\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x) \Rightarrow \exists y.(P(y) \wedge Q(y))$

nicht ableitbar sind. Gib jeweils die im Beweis des Vollständigkeitssatzes konstruierte Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ an und argumentiere, dass $\mathfrak{H}$ kein Modell der Formel ist.

Aufgabe 23: 25 Prozent

Sei τ eine endliche Signatur. Es ist bekannt, dass die Menge der FO(τ)-Formeln rekursiv aufzählbar ist.

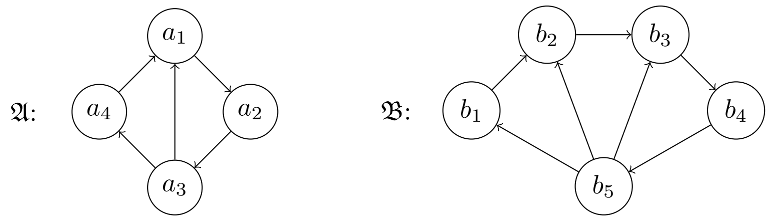
(a) Zeige, dass die Menge aller endlichen τ-Strukturen rekursiv aufzählbar ist.

(b) Verwende (a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO(τ)-Formeln, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.

(c) Verwende Trakhtenbrots Theorem, um zu beweisen, dass die Menge aller FO(τ)-Formeln, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 24: 25 Prozent

Gegeben seien die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.



Im Folgenden schreiben wir $\{(a_{i_1}, b_{i_1}), \ldots, (a_{i_n}, b_{i_n})\}$ für die partielle Funktion, die a_{i_j} auf b_{i_j} abbildet für alle $1 \leq j \leq n$.

(a) Prüfe, ob die folgenden partiellen Funktionen partielle Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ sind. Gib jeweils eine Begründung an.

   (i) $\{(a_1, b_3), (a_2, b_4)\}$

   (ii) $\{(a_1, b_4), (a_2, b_3)\}$

   (iii) $\{(a_3, b_5), (a_1, b_2), (a_2, b_3)\}$

   (iv) $\{(a_3, b_5), (a_1, b_3), (a_2, b_4)\}$

(b) Gib einen partiellen Isomorphismus δ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ mit einem Definitionsbereich der Größe 4 an. Ist δ auch ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$?

(c) Gibt es für ein Ehrenfeucht-Fraïsse-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $k = 3$ Runden eine Gewinnstrategie für den Spoiler? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 25: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

Sei R ein binäres Relationssyomobol und $R^{\mathfrak{A}}$ dessen Interpretation in der Struktur $\mathfrak{A}$. Die *transitive Hülle* von $R^{\mathfrak{A}}$ ist definiert als die Menge aller Paare $(a, b) \in A \times A$, für die es einen endliche Folge von Elementen $a_0, \ldots, a_n$ aus A gibt, so dass gilt:

(a) $a_0 = a$,

(b) $a_n = b$, und

(c) für alle $0 \leq i < n$ gilt $(a_i, a_{i+1}) \in R^{\mathfrak{A}}$.

Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die transitive Hülle nicht FO-definierbar ist, d.h. dass es keine FO-Formel $\psi(x, y)$ gibt, sodass für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a, b \in A$ gilt $A \models \psi(a, b)$ genau dann, wenn (a, b) in der transitiven Hülle von $R^{\mathfrak{A}}$ enthalten ist.

Hinweis: Definiere für alle $n \geq 1$ eine Formel $\varphi_n(x, y)$, die ausdrückt, dass y genau durch n "Schritte" in $R^{\mathfrak{A}}$ von x aus zu erreichen ist. Betrachte dann die (unendliche!) Formelmenge

$$\{\psi(a, b)\} \cup \{\neg\varphi_n(a, b) \mid n \geq 1\}$$

und erzeuge mit Hilfe der Kompaktheit einen Widerspruch.