AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Logik“

Aufgabe 6: 25 Prozent

Beweise die folgenden Aussagen (aus der Vorlesung):

(a) Eine DNF-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Disjunkt enthält, in dem nicht sowohl x als auch $\neg x$ vorkommen.

(b) Eine KNF-Formel ist genau dann gültig, wenn jedes Konjunkt zwei Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

Aufgabe 7: 25 Prozent

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $\psi \land (\psi \to \varphi) \models \varphi$

(b) Wenn $\varphi \land \psi \models \vartheta$ und $\varphi \land \neg\psi \models \vartheta$, dann gilt $\varphi \models \vartheta$.

(c) $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ gültig ist.

(d) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\varphi \models \neg\psi$, dann ist φ unerfüllbar.

(e) φ ist gültig genau dann, wenn $1 \models \varphi$.

Aufgabe 8: 25 Prozent

(a) Wende Resolution an, um für folgende Formeln zu entscheiden, ob sie erfüllbar sind:

(i) $(x_3 \lor \neg x_4) \land (x_1 \lor x_2) \land (\neg x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2) \land (x_4 \lor \neg x_2 \lor x_3)$

(ii) $(x_3 \to (x_1 \lor x_2)) \land (x_3 \lor x_4) \land (x_1 \to x_4) \land (x_2 \to x_1) \land (\neg x_2 \lor \neg x_4)$

Gib im Fall von Unerfüllbarkeit einen Resolutionsgraphen als Beweis für $\Box$ an.

(b) Verwende den Polyzeit-Algorithmus für Erfüllbarkeit von Hornformeln um festzustellen, ob die Formel

$$x_1 \land (x_1 \to x_2) \land (x_1 \land x_4 \to x_3) \land (x_1 \land x_2 \land x_3 \to 0) \land x_4$$

erfüllbar ist. Verifiziere dein Ergebnis durch Berechnen von $\mathrm{ERes}^*(M)$ für eine geeignete Klauselmenge M.

Aufgabe 9: 25 Prozent

(a) Wie kann man mit Hilfe von Resolution testen, ob eine Formel in DNF eine Tautologie ist?

(b) Zeige, dass jede Klauselmenge erfüllbar ist, wenn sie keine Klausel mit ausschließlich positiven Literalen enthält.

(c) Um einen Polyzeit-Algorithmus aus dem Resolutionssatz für Einheitsresolution abzuleiten, modifizieren wir die Funktion ERes (aus der Vorlesung). Dafür legen wir eine lineare Ordnung $<$ auf den Variablen fest, d.h. $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Eine Klausel C ist eine *minimale Einheitsresolvente von* M, wenn

- sie eine Einheitsresolvente von zwei Klauseln C_1, C_2 aus M ist mit $C_1 = \{x_i\}$ und
- es gibt kein $\neg x_j \in C_2$ mit $x_j < x_i$

Wir definieren nun die Funktion OERes durch

$$\mathrm{OERes}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ minimale Einheitsresolvente von } M\}$$

und definieren $\mathrm{OERes}^i(M)$ sowie $\mathrm{OERes}^*(M)$ analog zu $\mathrm{Res}^i(M)$ und $\mathrm{Res}^*(M)$ aus der Vorlesung. Man kann leicht zeigen, dass der Resolutionssatz für Einheitsresolution auch für die modifizierte Funktion OERes^* gilt. Zeige nun, dass $|\mathrm{OERes}^*(M)|$ polynomiell von $|M|$ abhängt und dass auch die Berechnung von $\mathrm{OERes}^*(M)$ in Polynomialzeit möglich ist.

Aufgabe 10: 25 Prozent (Zusatzaufgabe)

(a) Argumentiere, dass bei unerfüllbaren Hornformeln jeder Einheitsresolutionsbeweis für $\square$ polynomielle Größe hat.

(b) Gib eine Menge von Hornklauseln M an, bei der $|\mathrm{ERes}^*(M)|$ exponentiell von $|M|$ abhängt.