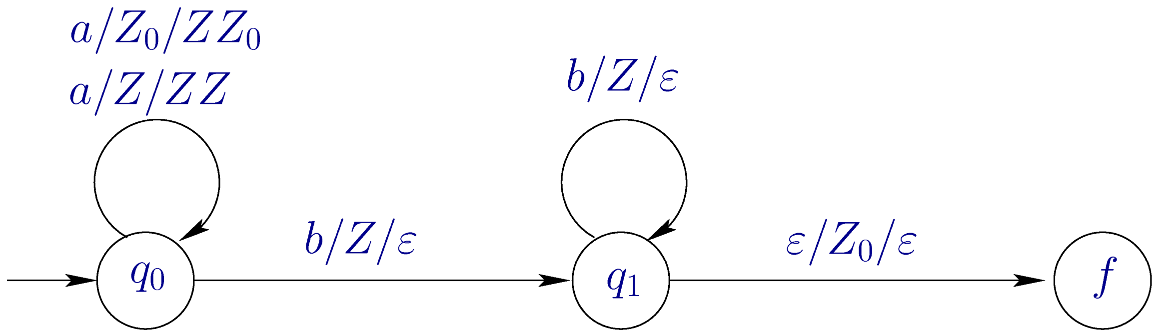
Deterministische Kellerautomaten

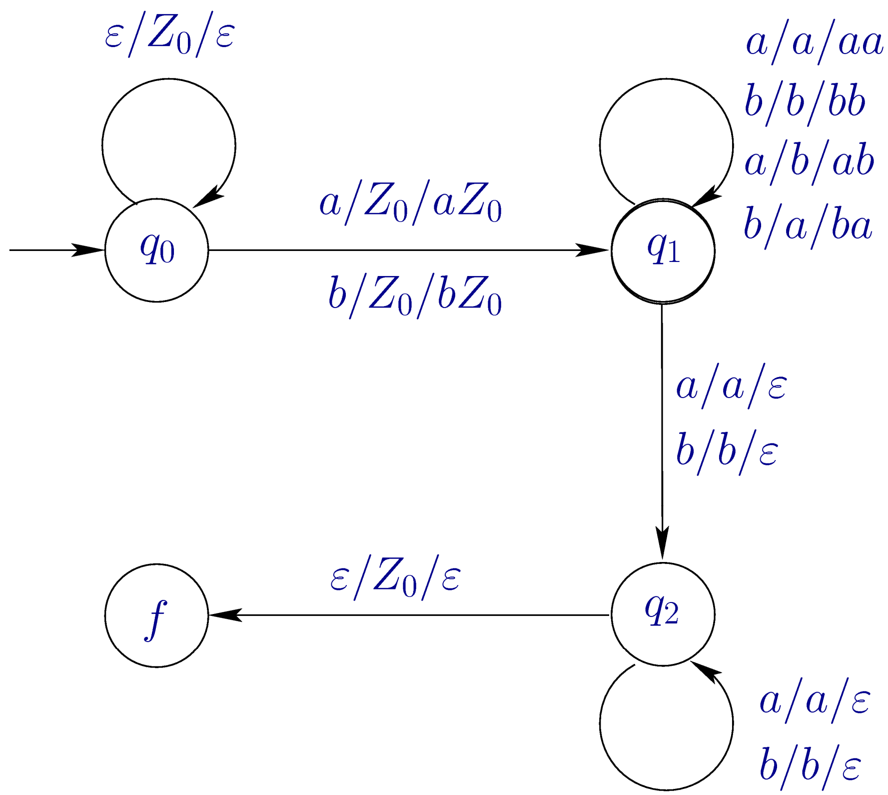
Der Kellerautomat aus Beispiel 10.3 ist deterministisch:

zu jeder Konfiguration gibt es höchstens eine Folgekonfiguration



Später verlangen wir wie bei DEAs: genau eine Folgekonfiguration

Der PDA für $L = \{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht-deterministisch:



Das läßt sich (scheinbar?) auch nicht vermeiden:

Wie soll man deterministisch die Wortmitte erkennen?

Deterministische Kellerautomaten akzeptieren per Endzustand:

Definition 10.10 (deterministischer Kellerautomat)

Ein deterministischer Kellerautomat (dPDA) ist ein PDA mit Endzuständen

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$$

so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

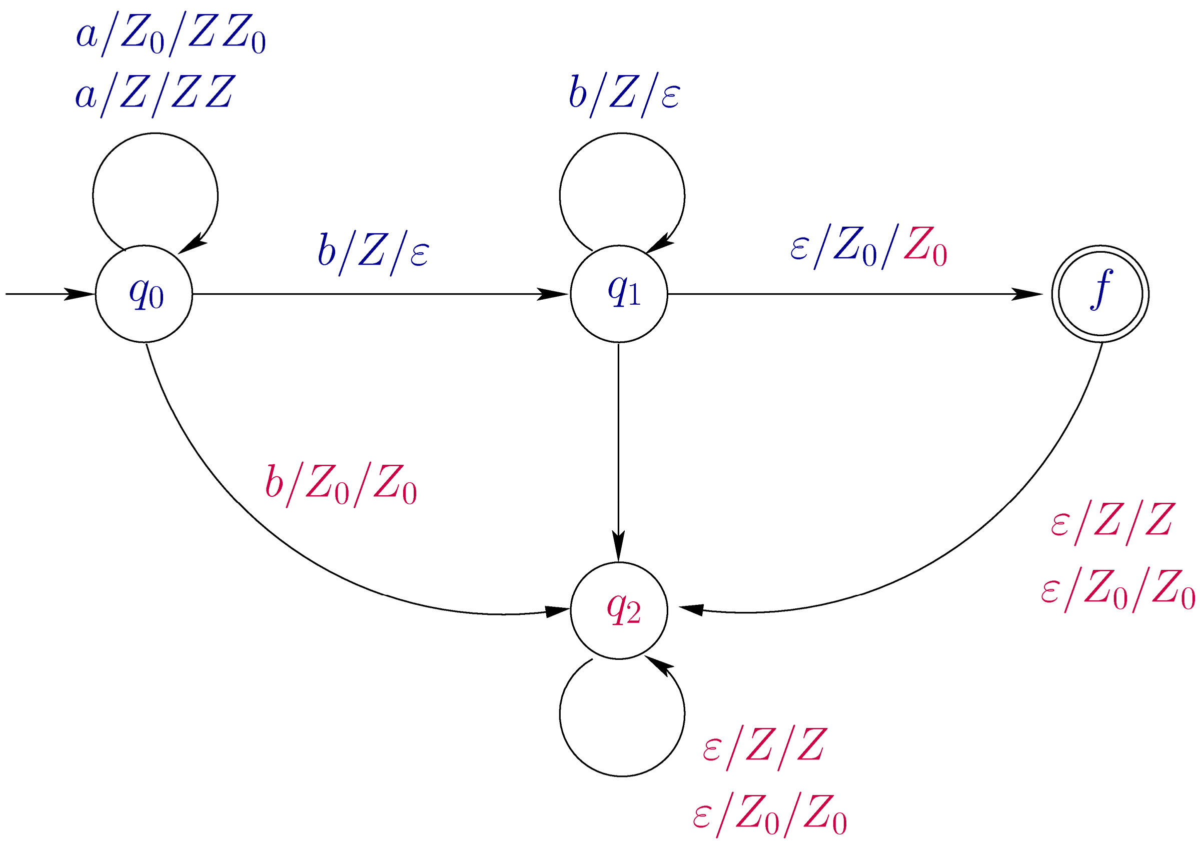
- Für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gibt es genau eine Transition der Form (q, a, Z, γ, q') oder $(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$
- Wenn eine Transition das Kellerstartsymbol Z_0 entfernt, so muss sie es direkt wieder zurückschreiben (q, a, Z_0, Z_0, q').

Beachte:

Zu jeder Konfiguration gibt es genau eine Folgekonfiguration

Dazu ist die Einschränkung für Z_0 notwendig!

Beispiel: dPDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:



Zur Erinnerung: $\mathcal{A}$ akzeptiert w gdw. $(q_0, w, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $\gamma \in \Gamma^*$

Betrachte Eingaben $aabb$, ba

Definition 10.11 (deterministisch kontextfreie Sprachen)

Eine formale Sprache L heisst deterministisch kontextfrei wenn es einen dPDA $\mathcal{A}$ gibt mit $L(\mathcal{A}) = L$.
Die Menge aller deterministisch kontextfreien Sprachen ist $\mathcal{L}_2^d$

Satz 10.12

$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$

Beweis:

- Ein DEA kann als dPDA mit nur einem Kellersymbol Z_0 angesehen werden, der seinen Keller nie modifiziert:
  aus $\delta(q, a) = q'$ wird Transition (q, a, Z_0, Z_0, q')
- $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär, aber in $\mathcal{L}_2^d$
- Jeder dPDA $\mathcal{A}$ ist auch PDA, also $L(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}_2$

Wir haben gesehen:

DEAs und NEAs gleichmächtig, erkennen beide die regulären Sprachen.

Bei PDAs ist das anders:

- dPDAs sind echt schwächer als PDAs
- $\mathcal{L}_2^d$ ist also eine echte Teilmenge von $\mathcal{L}_2$

Der Beweis beruht auf dem folgendem Resultat (ohne Beweis):

Satz 10.14

$\mathcal{L}_2^d$ ist unter Komplement abgeschlossen.

Zur Erinnerung: bei kontextfreien Sprachen ist das nicht so.

Satz 10.15

$\mathcal{L}_2^d \subset \mathcal{L}_2$.

Zu zeigen:

Es gibt kontextfreie Sprache, die nicht deterministisch kontextfrei ist.

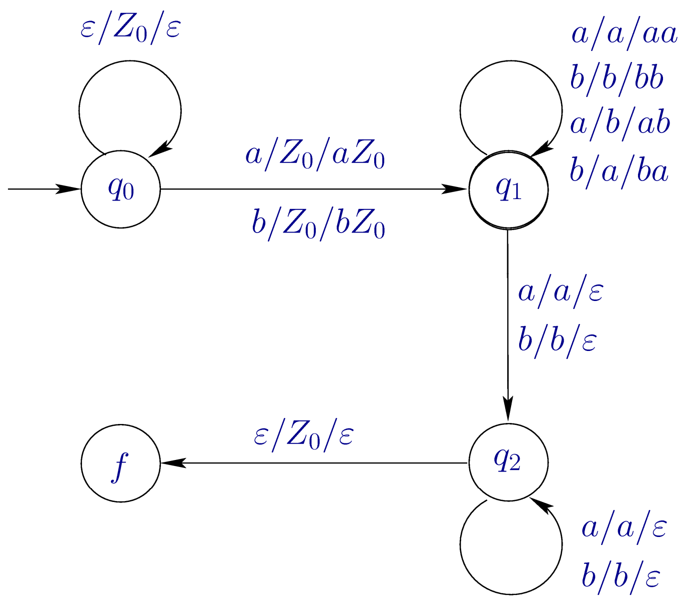
Nicht-konstruktiv:

- Angenommen $\mathcal{L}_2^d = \mathcal{L}_2$
- Dann ist mit $\mathcal{L}_2^d$ auch $\mathcal{L}_2$ unter Komplement abgeschlossen
- Widerspruch zu Korollar 9.5

Konstruktiv

- In Übung: $L = \{w \mid \forall v \in \{a,b\}^* : w \neq vv\} \in \mathcal{L}_2$, $\overline{L} \notin \mathcal{L}_2$
- Also ist $L \notin \mathcal{L}_2^d$, denn sonst wäre $\overline{L} \in \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$

Zurück zum dPDA für $L = \{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$:



Auch diese Sprache ist nicht deterministisch kontextfrei

Intuitiv muss der PDA nicht-deterministisch die Wortmitte „raten"

Die Sprache $\{w\, c\, \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist hingegen in $\mathcal{L}_2^d$

Für dPDAs stellt sich Akzeptanz per leerem Keller als sehr schwach heraus

Lemma 10.13

Es gibt keinen dPDA, der die reguläre Sprache $L = \{a^n \mid n \geq 0\}$ per leerem Keller akzeptiert.

Beweis:

- Angenommen, der dPDA $\mathcal{A}$ akzeptiert L per leerem Keller
- Da $a \in L$, gibt es eine Konfigurationsfolge

  $$\Omega = (q_0, a, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, w_1, \gamma_1) \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} (q_n, w_n, \gamma_n)$$

  mit $w_n = \gamma_n = \varepsilon$
- Wegen $aa \in L$ gibt es auch eine solche Folge Ω' für aa
- Da $\mathcal{A}$ deterministisch ist, ist Ω ein (echtes) Präfix von Ω'
- Widerspruch, da (q_n, w_n, γ_n) wegen $\gamma_n = \varepsilon$ keine Nachfolgekonf. hat!