Prof. Dr. Thomas Schneider SoSe 2018

Komplexitätstheorie

Übungsblatt 3

Abgabe als PDF bis 22. 5. 2018, 23:59 Uhr in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 3“
Bitte nur eine PDF-Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (25 %) Beweise oder widerlege:

a) Wenn $L \in \mathsf{P}$ und $L \leq_p L'$, dann $L' \in \mathsf{P}$.

b) Jede NP-harte Menge ist nichttrivial.

c) Wenn $L \subseteq L'$ und L NP-hart, dann L' NP-hart.

d) Wenn eine endliche Menge NP-vollständig ist, dann $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

e) $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{coNP}$ genau dann, wenn $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

f) Wenn es eine coNP-vollständige Menge $L \in \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$ gibt, dann $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

Zur Erinnerung: die *trivialen Mengen* sind $\emptyset$ und Σ^*.

2. (25 %) Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Eine *Paddingfunktion für* L ist eine Funktion $\mathsf{pad} : (\Sigma^* \times \Gamma^*) \to \Sigma^*$ (mit Γ beliebig), so dass gilt:

1. $\mathsf{pad}(x, y)$ kann in polynomieller Zeit berechnet werden.
2. Für alle $x, y \in \Sigma^* \times \Gamma^*$ gilt: $\mathsf{pad}(x, y) \in L$ gdw. $x \in L$
3. Für alle $x, y \in \Sigma^* \times \Gamma^*$ gilt $|\mathsf{pad}(x, y)| > |x| + |y|$.
4. Gegeben $\mathsf{pad}(x, y)$ kann y in polynomieller Zeit berechnet werden.

Zeige:

a) Es gibt eine Paddingfunktion für 3SAT.

b) Wenn $L' \leq_p L$ und es eine Paddingfunktion für L gibt, dann gibt es eine injektive Reduktion f von L' auf L, so dass f^{-1} in polynomieller Zeit berechenbar ist.

In einem weiteren Schritt (der hier nicht durchgeführt werden soll) kann man nun beweisen, dass alle NP-vollständigen Probleme L und L' p-isomorph sind, wenn sie (beide!) Paddingfunktionen besitzen.

3. (25 %) Welche der folgenden Probleme sind als CSP darstellbar? Begründe jeweils.

a) 2-Färbbarkeit für ungerichtete Graphen

b) Erreichbarkeit in gerichteten Graphen

c) CLIQUE_k (wie CLIQUE, aber mit fest vorgegebener Cliquengröße k)

d) IPROG_k (wie IPROG, aber Konstanten und Variablen dürfen nur Werte $\{0, \ldots, k\}$ annehmen)

Bitte wenden.

4. (25 %) Beweise, dass die folgende Sprache ExpTime-vollständig ist.

$U_E = \{(\mu_M, w, k) \mid$ Wort μ_M kodiert DTM, die Eingabe w in k Schritten akzeptiert$\}$.

Dabei ist die Eingabekomponente k natürlich *binär* kodiert.

5. Zusatzaufgabe (20 %) Für $A \subseteq \mathbb{N}$ verwenden wir

$$\begin{array}{rl} \text{die Unärdarstellung} & \mathsf{UN}(A) := \{1^n \mid n \in A\} \qquad \text{und} \\ \text{die Binärdarstellung} & \mathsf{BIN}(A) := \{\mathsf{bin}(n) \mid n \in A\}. \end{array}$$

Zeige, dass für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{UN}(A) \in \mathsf{P} \quad \text{gdw.} \quad \mathsf{BIN}(A) \in \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}).$$

Hinweis: Man soll Unär- und Binärdarstellung ja wechselseitig umwandeln können.