# Beschreibungslogik
# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

Sommersemester 2018 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ss18-bl





## Vorlesungsübersicht

Kapitel 1: Einleitung
Kapitel 2: Grundlagen
Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
Kapitel 4: Tableau-Algorithmen
Kapitel 5: Komplexität
**Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken**
Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung





## Ziel des Kapitels

**Für manche Anwendungen ist $\mathcal{ALC}$ zu komplex:**

- Auch hoch-optimierte Reasoner können sehr große und komplexe Ontologien oft nicht verarbeiten (oder nur nach intensivem Tuning)
- In der Anfragebeantwortung muss man oft mit sehr großen Datenmengen umgehen und braucht schnelle Antworten (Kapitel 7)

**Wir betrachten die Beschreibungslogik $\mathcal{EL}$:**

- viel weniger ausdrucksstark als $\mathcal{ALC}$, Basisoperatoren nur $\sqcap$ und $\exists r.C$
- Erfüllbarkeit und Subsumtion in Polyzeit entscheidbar





## Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1. $\mathcal{EL}$
2. Subsumtion ohne TBox
3. Subsumtion mit TBoxen
4. Erweiterungen von $\mathcal{EL}$

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1. $\mathcal{EL}$
2. Subsumtion ohne TBox
3. Subsumtion mit TBoxen
4. Erweiterungen von $\mathcal{EL}$





# $\mathcal{EL}$

**Definition 6.1 ($\mathcal{EL}$)**

Ein **$\mathcal{EL}$-Konzept** ist ein $\mathcal{ALC}$-Konzept, in dem nur die Konstruktoren $\top$, $\sqcap$ und $\exists r.C$ verwendet werden.

$\mathcal{EL}$ ist beliebt für biomedizinische Ontologien (die sind oft groß und mit hohem Abstraktionsgrad):

$$\begin{aligned} \text{Perikardium} &\sqsubseteq \text{Gewebe} \sqcap \exists \text{teilVon.Herz} \\ \text{Perikarditis} &\equiv \text{Entzündung} \sqcap \exists \text{ort.Perikardium} \\ \text{Entzündung} &\sqsubseteq \text{Krankheit} \sqcap \exists \text{wirktAuf.Gewebe} \end{aligned}$$

SNOMED CT ist in unwesentlicher Erweiterung von $\mathcal{EL}$ formuliert.

$\mathcal{EL}$ ist Grundlage des **EL-Profils von OWL 2**.





# Simulation

**Intuitiv:** $\mathcal{EL}$ ist die „Hälfte von $\mathcal{ALC}$";
Simulation entspricht der **„Hälfte von Bisimulation"**.

**Definition 6.2 (Simulation)**

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen.
Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist **Simulation** von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$, wenn gilt:

1. Wenn $d_1 \ \rho \ d_2$, dann gilt für alle Konzeptnamen $A$:
$$d_1 \in A^{\mathcal{I}_1} \quad \textbf{impliziert} \quad d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$$
2. Wenn $d_1 \ \rho \ d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ für beliebigen Rollennamen $r$, dann gibt es ein $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \ \rho \ d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$.

**T 6.1**

**Beachte:**
Im Gegensatz zu Bisimulationen sind **Simulationen gerichtet**.





# Simulation

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wir schreiben $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$,
wenn es Simulation $\rho$ von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ gibt mit $d_1 \ \rho \ d_2$
(wir sagen: $d_1$ **wird simuliert von** $d_2$).

**Theorem 6.3**

Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte $C$:
$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \textbf{impliziert} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

**T 6.2**

## Simulation vs. Bisimulation; Ausdrucksstärke

**Intuitiv:** Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$, dann kann $\mathcal{EL}$ nicht zwischen $d_1$ und $d_2$ „unterscheiden".

**Achtung:**
Bisimulation und wechselseitige Simulation sind **nicht dasselbe:**

**Lemma 6.4**
Es gibt $(\mathcal{I}_1, d_1)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2)$, so dass:

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$

**T 6.3**

Man kann nun wieder Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate zeigen:

**Lemma 6.5**
Das $\mathcal{ALC}$-Konzept $\forall r.A$ ist **nicht** in $\mathcal{EL}$ ausdrückbar.

**T 6.3 Forts.**





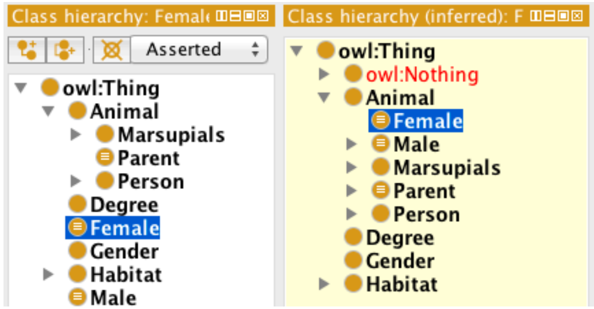
## Schlussfolgerungsprobleme in $\mathcal{EL}$

In $\mathcal{EL}$ ist Erfüllbarkeit **kein** interessantes Schlussfolgerungsproblem:

**Lemma 6.6**
Jedes $\mathcal{EL}$-Konzept ist erfüllbar bzgl. jeder TBox.

**T 6.4**

Darum konzentrieren wir uns auf **Subsumtion.**








## Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1 $\mathcal{EL}$
2 Subsumtion ohne TBox
3 Subsumtion mit TBoxen
4 Erweiterungen von $\mathcal{EL}$



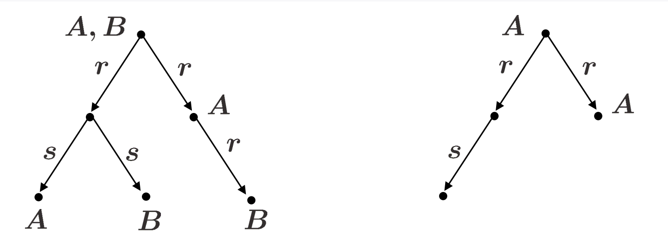


## Intuition

Eine Subsumtion $C \sqsubseteq D$ gilt in $\mathcal{EL}$ im Prinzip genau dann, wenn man **$D$ syntaktisch „in $C$ wiederfindet".**

z. B.: $C = A \sqcap B \sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$ $\qquad D = A \sqcap \exists r.\exists s.\top \sqcap \exists r.A$

Konzepte dargestellt als Bäume: „Wiederfinden" entspricht **Simulation** von $D$-Baum in $C$-Baum **(Richtung!)**



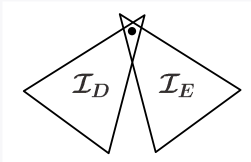
# Kanonisches Modell

**Definition 6.7**

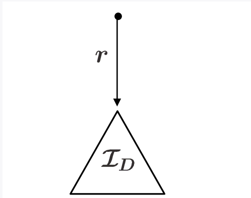
Wir ordnen induktiv jedem $\mathcal{EL}$-Konzept $C$ eine Interpretation $\mathcal{I}_C$ zu:

$C = \top$ Modell $\mathcal{I}_C$: $\bullet$

$C = A$ Modell $\mathcal{I}_C$: $\bullet^A$




$C = D \sqcap E$ Modell $\mathcal{I}_C$:




$C = \exists r.D$ Modell $\mathcal{I}_C$:





# Kanonisches Modell

Wir nennen $\mathcal{I}_C$ **kanonisches Modell**, bezeichnen Wurzel stets mit $d_W$.

Man sieht leicht, dass $\mathcal{I}_C$ wirklich ein **Modell** ist:

**Lemma 6.8**

Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte $C$ gilt:

Die Interpretation $\mathcal{I}_C$ ist Modell von $C$ mit $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$.

**T 6.5**

Die zentrale Eigenschaft kanonischer Modelle:

**Lemma 6.9**

Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte $C$, Interpretationen $\mathcal{I}$ und $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$e \in C^{\mathcal{I}} \quad \textbf{gdw.} \quad (\mathcal{I}_C, d_W) \precsim (\mathcal{I}, e)$$

**T 6.6**





# Charakterisierung von Subsumtion

Wir zeigen nun, dass $C \sqsubseteq D$ gdw. man $\mathcal{I}_D$ in $\mathcal{I}_C$ "wiederfindet":

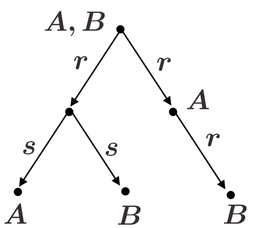
**Lemma 6.10**

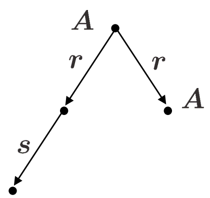
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte $C$, $D$ gilt:

$$C \sqsubseteq D \quad \textbf{gdw.} \quad (\mathcal{I}_D, d_W) \precsim (\mathcal{I}_C, d_W)$$

**T 6.7**

z. B.: $C = A \sqcap B \sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$ $\qquad D = A \sqcap \exists r.\exists s.\top \sqcap \exists r.A$








# Entscheidungsverfahren für Subsumtion

Nun folgt:

**Theorem 6.11**

Subsumtion in $\mathcal{EL}$ kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

**T 6.8**

**Beweis.** (Recht einfacher) Algorithmus:

**(1)** Konstruiere $\mathcal{I}_C$ und $\mathcal{I}_D$ in polynomieller Zeit.

**(2)** Überprüfe in polynomieller Zeit, ob $(\mathcal{I}_D, d_W) \precsim (\mathcal{I}_C, d_W)$:

- **(a)** Berechne **maximale Simulation** $\rho$ von $\mathcal{I}_D$ nach $\mathcal{I}_C$ (siehe Übungsblatt 5)
- **(b)** Teste, ob $(d_W, d_W) \in \rho$. □

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1 $\mathcal{EL}$

2 Subsumtion ohne TBox

3 Subsumtion mit TBoxen

4 Erweiterungen von $\mathcal{EL}$





# Intuition

Wir verwenden ein so genanntes **konsequenzbasiertes** Verfahren.

**Grundidee:**

- Mit Hilfe von **Regeln** werden zur TBox nach und nach neue Konzeptinklusionen hinzugefügt.
- Am Ende muss man dann nur noch nachschauen, ob die gewünschte Subsumtion in der TBox **explizit enthalten** ist.

In der Praxis haben sich derartige Verfahren als **äußerst effizient** herausgestellt.

Sie sind verwandt mit **Sequenzenkalkülen** aus der klassischen Logik.





# Vereinfachende Annahme 1

Betrachten **o. B. d. A.** nur Subsumtion von Konzept**namen** bzgl. TBoxen.

Seien $\mathcal{T}$ $\mathcal{EL}$-TBox und $C, D$ $\mathcal{EL}$-Konzepte (beliebig).

Um $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ zu entscheiden:

- Nimm zwei neue Konzept**namen** $A_C, A_D$.
- Füge zu $\mathcal{T}$ hinzu: $A_C \sqsubseteq C$ und $D \sqsubseteq A_D \rightsquigarrow$ TBox $\boldsymbol{\mathcal{T}'}$.
- Entscheide, ob $\mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$ gilt.

**Korrektheit dieses Verfahrens:**

**Lemma 6.12**

$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ gdw. $\mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$ **(Übung)**

Lemma 6.12 liefert **Polyzeit-Reduktion**
von Subsumtion zwischen beliebigen Konzepten bzgl. TBoxen
auf Subsumtion zwischen Konzeptnamen bzgl. TBoxen.





# Annahme 2: Normalform

Betrachten **o. B. d. A.** nur TBoxen in folgender Normalform:

**Definition 6.13**

Eine TBox ist in **Normalform (NF)**, wenn sie nur Inklusionen der Form

$$A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq A \qquad A \sqsubseteq \exists r.A_1 \qquad \exists r.A \sqsubseteq A_1$$

enthält, wobei $A, A_1, \ldots, A_n$ Konzept**namen** oder $\top$ sind.

**Lemma 6.14**

Jede $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ kann in polynomieller Zeit in eine TBox $\mathcal{T}'$ in NF gewandelt werden, so dass für alle Konzeptnamen $A, B$ in $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B \qquad (*)$$

Wenn $(*)$ gilt, sagen wir: $\mathcal{T}'$ ist **konservative Erweiterung** von $\mathcal{T}$.

Um die NF herzustellen, wenden wir **Normalisierungsregeln** an. **T 6.9**

# Normalisierung

**NF1** $C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E \quad \rightsquigarrow$
$C_i \sqsubseteq A_{C_i}, \quad C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_{i-1} \sqcap A_{C_i} \sqcap C_{i+1} \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E$
wenn $C_i$ Existenzrestriktion

**NF2** $\exists r.C \sqsubseteq E \quad \rightsquigarrow \quad C \sqsubseteq A_C, \quad \exists r.A_C \sqsubseteq E$
**NF3** $C \sqsubseteq \exists r.D \quad \rightsquigarrow \quad C \sqsubseteq A_C, \quad A_C \sqsubseteq \exists r.D$
**NF4** $A \sqsubseteq \exists r.C \quad \rightsquigarrow \quad A \sqsubseteq \exists r.A_C, \quad A_C \sqsubseteq C$
**NF5** $A \sqsubseteq C_1 \sqcap C_2 \quad \rightsquigarrow \quad A \sqsubseteq C_1, \quad A \sqsubseteq C_2$

} wenn $C$ weder Konzeptname noch $\top$

$A$ ist Konzept**name**; $C_i, D, E$ sind **beliebige** Konzepte; $A_{C_{(i)}}$ sind **neue** Konzept**namen**.

**Lemma 6.15**

Jede $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ kann durch **linear viele** Regelanwendungen in TBox in NF transformiert werden, die konservative Erweiterung von $\mathcal{T}$ ist.

**T 6.10**





# Subsumtion mit TBox

Der Algorithmus beginnt mit der ursprünglichen TBox und wendet dann erschöpfend folgende Regeln an.

**R1** $\dfrac{}{A \sqsubseteq A}$ wenn $A$ in $\mathcal{T}$ vorkommt **R2** $\dfrac{}{A \sqsubseteq \top}$ wenn $A$ in $\mathcal{T}$ vorkommt

**R3** $$\frac{A \sqsubseteq A_1 \quad \cdots \quad A \sqsubseteq A_n \quad A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

**R4** $$\frac{A \sqsubseteq \exists r.A_1 \quad A_1 \sqsubseteq B_1 \quad \exists r.B_1 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

**T 6.11**

**Beachte:** $A, A_1, \ldots, A_n, B$ sind Konzept**namen oder** $\top$.





# Saturierung

Für eine $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ sei $\mathcal{T}^*$ das Ergebnis erschöpfender Regelanwendung. Wir nennen $\mathcal{T}^*$ die **Saturierung** von $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}^*$ macht alle Subsumtionen zwischen Konzeptnamen explizit:

**Theorem 6.16**

Für alle Konzeptnamen $A, B$ in $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \textbf{gdw.} \quad A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$$

Der Algorithmus **klassifiziert** also die Konzeptnamen **vollständig;** berechnet nicht nur eine einzelne Subsumtion.

Vor dem Beweis des Theorems: Terminierung.





# Terminierung des Algorithmus

**Theorem 6.17**

Die Konstruktion von $\mathcal{T}^*$ **terminiert** nach $\boldsymbol{\mathcal{O}(|\mathcal{T}|^2)}$ vielen Regelanwendungen.

**Beweis.**
Jede Regelanwendung erzeugt neue Konzeptinklusion $A \sqsubseteq B$, mit $A, B$ Konzeptnamen aus der ursprünglichen TBox $\mathcal{T}$ (oder $\top$).

Es gibt nur $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|^2)$ viele solche Inklusionen. □

## Korrektheit des Algorithmus

Wir beweisen nun Theorem 6.16. Korrektheit:

**Lemma 6.18**

Für alle Konzeptnamen $A, B$ in $\mathcal{T}$ gilt:

$$A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^* \quad \textbf{impliziert} \quad \mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$$

**Beweis.**
Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n = \mathcal{T}^*$ die durch Regelanwendung erzeugte Folge von TBoxen. Es genügt zu zeigen:

**Beh.:** Für alle $i < n$ gilt: $\mathcal{T}_i \models \mathcal{T}_{i+1}$
(d. h.: $\mathcal{T}_i \models C \sqsubseteq D$ für alle $C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}_{i+1}$)

T 6.12

Daraus folgt direkt $\mathcal{T} \models \mathcal{T}^*$. □





## Vollständigkeit

Konstruieren ein einziges Modell, das **alle nicht** aus $\mathcal{T}$ folgenden Subsumtionen zwischen Konzeptnamen **gleichzeitig** falsch macht.

Existenz solcher **kanonischer Modelle** ist **zentrale Eigenschaft** von $\mathcal{EL}$.

**Definition 6.19**

Die *kanonische Interpretation* $\mathcal{I}$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{I}} &= \{d_A \mid A \text{ Konzeptname in } \mathcal{T}^*\} \cup \{d_\top\} \\
A^{\mathcal{I}} &= \{d_B \mid B \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^*\} \\
r^{\mathcal{I}} &= \{(d_A, d_B) \mid A \sqsubseteq A' \in \mathcal{T}^* \text{ und } A' \sqsubseteq \exists r.B \in \mathcal{T}^*, \\
&\qquad A' \text{ Konzeptname}\}
\end{aligned}$$

T 6.13

**Lemma 6.20**

Die kanonische Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Model von $\mathcal{T}^*$. T 6.14





## Vollständigkeit

Jetzt zeigt man leicht:

**Lemma 6.21**

Für alle Konzeptnamen $A, B$ in $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \textbf{impliziert} \quad A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$$

**Beweis.** Angenommen $A \sqsubseteq B \notin \mathcal{T}^*$. $(*)$

Betrachte Element $d_A$ der kanonischen Interpretation $\mathcal{I}$.

Wegen R1 ist $A \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^*$, also $d_A \in A^{\mathcal{I}}$.

Def. von $\mathcal{I}$ und $(*)$ liefert $d_A \notin B^{\mathcal{I}}$.

Da $\mathcal{I}$ Modell von $\mathcal{T}^*$ (Lemma 6.20) und damit von $\mathcal{T}$ ist, folgt $\mathcal{T} \not\models A \sqsubseteq B$. □





## Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken


1. $\mathcal{EL}$
2. Subsumtion ohne TBox
3. Subsumtion mit TBoxen
4. Erweiterungen von $\mathcal{EL}$

## „Gute“ und „schlechte“ Erweiterungen

**Der Algorithmus kann angepasst werden an $\mathcal{EL}$ erweitert mit:**

- $\bot$
- „Range Restrictions“ $\top \sqsubseteq \forall r.C$ und
  „Domain Restrictions“ $\top \sqsubseteq \forall r^-.C$

  z. B. $\top \sqsubseteq \forall\,\mathsf{hatKind.Mensch}$
  $\top \sqsubseteq \forall\,\mathsf{hatKind}^-.\mathsf{Elternteil}$
- Rolleninklusionen mit Verkettung: $r_1 \circ \cdots \circ r_n \sqsubseteq r$

  z. B. hatGeschwister $\circ$ hatTochter $\sqsubseteq$ hatNichte
- $\cdots$

Dies (und mehr) ist im EL-Profil von OWL 2 realisiert.





## „Gute“ und „schlechte“ Erweiterungen

**Viele andere Erweiterungen sind jedoch ExpTime-vollständig (wie $\mathcal{ALC}$).**

Wir betrachten exemplarisch

- $\mathcal{ELU}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\sqcup$
- $\mathcal{EL}_\forall$ , die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\forall r.C$
- $\mathcal{EL}^{\geqslant 2}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\geqslant 2\, r.\top$





## $\mathcal{EL}$ mit Disjunktion und $\bot$

**Theorem 6.22**
Erfüllbarkeit in $\mathcal{ELU}_\bot$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

**Beweis.**
Reduktion von **Erfüllbarkeit** von Konzeptnamen $A$ bzgl. $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$

**Schritt 1.** Ersetze in $\mathcal{T}$ alle Werte- durch Existenzrestriktionen:

$$\forall r.C \qquad \text{wird} \qquad \neg\exists r.\neg C$$

**Schritt 2.** Modifiziere $\mathcal{T}$ so, dass $\neg$ nur vor Konzeptnamen auftritt:

z. B. $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg\exists r.B)$ wird $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg X)$
$X \equiv \exists r.B$
($X$ neuer Konzeptname)





## $\mathcal{EL}$ mit Disjunktion und $\bot$

**Schritt 3.** Entferne Negation vollständig aus $\mathcal{T}$:

- Ersetze jedes $\neg X$ durch neuen Konzeptnamen $\overline{X}$
- Erzwinge korrektes Verhalten der $\overline{X}$ :

$$\top \sqsubseteq X \sqcup \overline{X}$$
$$X \sqcap \overline{X} \sqsubseteq \bot$$

Die resultierende $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox sei $\mathcal{T}'$.

**Lemma 6.23**
Für alle Konzeptnamen $A$ gilt:

$$A \text{ erfüllbar bzgl. } \mathcal{T} \quad \textbf{gdw.} \quad A \text{ erfüllbar bzgl. } \mathcal{T}'$$

**T 6.15**

## $\mathcal{EL}$ mit Disjunktion

**Theorem 6.24**

Subsumtion in $\mathcal{ELU}$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

**Beweis.**

Reduktion von **Erfüllbarkeit** von Konzeptnamen $A$ bzgl. $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox $\mathcal{T}$

Konstruiere $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}'$ :

- nimm o. B. d. A. an, dass $\bot$ nur in der Form $C \sqsubseteq \bot$ vorkommt (jedes $\mathcal{ELU}_\bot$-Konzept ist äquivalent zu $\mathcal{ELU}$-Konzept oder $\bot$):
  - Wende erschöpfend folgende offensichtliche Äquivalenzen an:

    $$C \sqcap \bot \equiv \bot \qquad C \sqcup \bot \equiv C \qquad \exists r.\bot \equiv \bot$$

  - Dann sind alle Axiome in der Form

    $$C \sqsubseteq D \qquad \bot \sqsubseteq D \qquad C \sqsubseteq \bot \qquad \bot \sqsubseteq \bot$$

    mit $C, D$ $\mathcal{ELU}$-Konzepte.
    Fälle $\bot \sqsubseteq D$ und $\bot \sqsubseteq \bot$ sind Tautologien $\rightsquigarrow$ löschen.
    Nun tritt $\bot$ nur noch in Form $C \sqsubseteq \bot$ auf.





## $\mathcal{EL}$ mit Disjunktion

**Theorem 6.24**

Subsumtion in $\mathcal{ELU}$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

**Beweis.**

Reduktion von **Erfüllbarkeit** von Konzeptnamen $A$ bzgl. $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox $\mathcal{T}$

Konstruiere $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}'$ :

- nimm o. B. d. A. an, dass $\bot$ nur in der Form $C \sqsubseteq \bot$ vorkommt (jedes $\mathcal{ELU}_\bot$-Konzept ist äquivalent zu $\mathcal{ELU}$-Konzept oder $\bot$)
- ersetze $\bot$ durch neuen Konzeptnamen $\boldsymbol{L}$
- füge hinzu:

  $$\exists \boldsymbol{r}.\boldsymbol{L} \sqsubseteq \boldsymbol{L} \quad \text{für alle Rollennamen } r \text{ in } \mathcal{T}$$

**Lemma 6.25**

$A$ **unerfüllbar** bzgl. $\mathcal{T}$ **gdw.** $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq L$. **T 6.16**





## $\mathcal{EL}$ mit Werterestriktionen

$\mathcal{EL}^\forall$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $\forall r.C$ .

**Theorem 6.26**

In $\mathcal{EL}^\forall$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

**Beweis:**

Reduktion von **Subsumtion** zwischen Konzeptnamen bzgl. $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}$

Können annehmen, dass $\sqcup$ nur in den folgenden Formen vorkommt:

- $A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A$ $\rightsquigarrow$ Ersetze durch $A_1 \sqsubseteq A$, $A_2 \sqsubseteq A$
- $A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$ $\rightsquigarrow$ Ersetze durch $\begin{array}{l} A \sqcap \exists r.\top \sqsubseteq B_1 \\ A \sqcap \forall r.X \sqsubseteq B_2 \end{array}$ $r, X$ neu

Die resultierende $\mathcal{EL}^\forall$-TBox sei $\mathcal{T}'$.

**Lemma 6.27**

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ **gdw.** $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$. **T 6.17**





## $\mathcal{EL}$ mit Zahlenrestriktionen

$\mathcal{EL}^{\geqslant 2}$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $\geqslant 2\, r.\top$ .

**Theorem 6.28**

In $\mathcal{EL}^{\geqslant 2}$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

**Beweis:** Wieder Reduktion von **$\mathcal{ELU}$-Subsumtion**

Können annehmen, dass $\sqcup$ nur in den folgenden Formen vorkommt:

- $A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A$ $\rightsquigarrow$ Ersetze durch $A_1 \sqsubseteq A$, $A_2 \sqsubseteq A$
- $A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$ $\rightsquigarrow$ Ersetze durch $\begin{array}{l} A \sqsubseteq \exists r.X \sqcap \exists r.Y \\ A \sqcap \exists r.(X \sqcap Y) \sqsubseteq B_1 \\ A \sqcap \geqslant 2\, r.\top \sqsubseteq B_2 \end{array}$ $(r, X, Y$ neu$)$

Die resultierende $\mathcal{EL}^\forall$-TBox sei $\mathcal{T}'$.

**Lemma 6.29**

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ **gdw.** $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$. **(Übung)**

## Konvexität

Eine Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist **konvex**,
wenn für alle TBoxen $\mathcal{T}$ und Konzepte $C, D_1, D_2$ gilt:

$\boldsymbol{\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2}$ impliziert $\boldsymbol{\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_1}$ oder $\boldsymbol{\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_2}$

$\mathcal{EL}^{\forall}$ **ist nicht konvex:**

$\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq \exists r.\top \sqcup \forall r.X$ aber $\mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \exists r.\top$
und $\mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \forall r.X$

Unsere Beweise zeigen im Prinzip:
jede **nicht-konvexe** Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist **ExpTime-hart.**

Aber auch konvexe Erweiterungen sind nicht zwangsläufig in P:
Z. B. ist $\boldsymbol{\mathcal{ELI}}$ ($\mathcal{EL}$ „plus“ $\exists r^{-}.C$) konvex, aber ExpTime-vollst.

Für konvexe Erweiterungen gibt es oft effiziente konsequenzbasierte Algorithmen.





## Zusammenfassung für $\mathcal{EL}$

Die $\mathcal{EL}$-Familie von BLen:

- Erlaubt Schlussfolgern in polynomieller Zeit
- Es gibt viele Reasoner wie ELK, CEL, SNOROCKET
- Skaliert auch auf große Terminologien wie SNOMED CT
  ($>$ 400.000 Konzepte, wird in wenigen Sekunden klassifiziert)
- Stellt viele Operatoren zur Verfügung,
  hat aber eingeschränktes Ausdrucksvermögen
  (z. B. kann keine Disjunktion ausgedrückt werden – Konvexität!)





## Literatur für dieses Kapitel (Basis)

Franz Baader, Ian Horrocks, Carsten Lutz, Uli Sattler.
An Introduction to Description Logic.
Cambridge University Press, 2017.
Kapitel 6: Reasoning in the $\mathcal{EL}$ Family of DLs
In SUUB verfügbar: https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook
https://tinyurl.com/suub-intro-dl





## Literatur für dieses Kapitel (weiterführend 1)

Franz Baader, Sebastian Brandt, Carsten Lutz.
Pushing the $\mathcal{EL}$ Envelope.
IJCAI 2005: 364–369.
http://ijcai.org/Proceedings/05/Papers/0372.pdf
Untersucht systematisch Erweiterungen von $\mathcal{EL}$, die in Polyzeit bleiben oder höhere Komplexität verursachen.
Technischer Report mit Beweisdetails: http://lat.inf.tu-dresden.de/research/reports/2005/BaaderBrandtLutz-LTCS-05-01.ps.gz

Franz Baader, Sebastian Brandt, Carsten Lutz.
Pushing the $\mathcal{EL}$ Envelope Further.
OWLED (Spring) 2008.
http://ceur-ws.org/Vol-496/owled2008dc_paper_3.pdf
Führt die vorangegangene Arbeit fort.

# Literatur für dieses Kapitel (weiterführend 2)

Boontawee Suntisrivaraporn.
Optimization and Implementation of Subsumption Algorithms for the Description Logic $\mathcal{EL}$ with Cyclic TBoxes and General Concept Inclusion Axioms.
Masterarbeit, TU Dresden, 2005.
https://lat.inf.tu-dresden.de/research/mas/Sun-Mas-05.pdf
Erklärt anschaulich Normalisierung und Klassifikation für $\mathcal{EL}$ (ohne Erweiterungen). Allerdings weichen die Regeln etwas von denen aus der Vorlesung ab; „unsere" sind besser optimiert.





# Links für dieses Kapitel

University of Manchester
OWL API
http://owlcs.github.io/owlapi/
https://github.com/owlcs/owlapi/wiki (Wiki + Doku.)
**Die** API der Wahl, um mit Ontologien zu arbeiten.

University of Manchester
List of Reasoners
http://owl.cs.manchester.ac.uk/tools/list-of-reasoners/
Eine aktuelle Übersicht von DL-Reasonern
(die speziell für $\mathcal{EL}$ entwickelten haben meist ein „EL" im Namen)