Beschreibungslogik

Übungsblatt 4

Abgabe bis 4. 6. 2017, 23:59 Uhr in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 4“, im PDF-Format. Bitte nur eine Abgabe pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

1. (25 %) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe kurz.

a) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ ohne TBoxen terminiert immer.

b) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen terminiert für manche Eingaben nicht.

c) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ verhält sich auf jeder Eingabe $(C_0, \mathcal{T})$ genauso wie der Algorithmus für Typelimination: entweder geben beide „erfüllbar“ aus oder beide „unerfüllbar“.

d) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ hat im Worst Case dieselbe Laufzeit wie Typelimination.

e) Wenn ein Typ t schlecht in Γ ist, dann gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$, so dass $\{t_\mathcal{I}(d) \mid d \in \Delta^\mathcal{I}\} \subseteq \Gamma$ und $t = t_\mathcal{I}(d)$ für ein $d \in \Delta^\mathcal{I}$.

2. (25 %) Verwende Typelimination um zu entscheiden, ob

a) $C_0 = A$ erfüllbar bzgl. der TBox $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A, \top \sqsubseteq A, \forall r.A \sqsubseteq \exists r.A\}$ ist;

b) $C_0 = \forall r.\forall r.\neg B$ erfüllbar bzgl. der TBox $\mathcal{T} = \{\neg A \sqsubseteq B, A \sqsubseteq \neg B, \top \sqsubseteq \neg\forall r.A\}$ ist.

Gib jeweils die konstruierte Folge $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ an. Im Fall von Erfüllbarkeit gib das Modell aus dem Beweis von Lemma 5.5 an. Beim Wandeln der TBox in Normalform kannst Du Inklusionen der Form $\top \sqsubseteq C$ direkt in $\mathsf{NNF}(C)$ wandeln anstatt in $\neg\top \sqcup C$.

3. (25 %) Betrachte die folgenden ExpTime-Spiele und bestimme, ob Spielerin 2 eine Gewinnstrategie hat. Wenn dies der Fall ist, gib die Strategie an. Wenn nicht, beschreibe, wie Spielerin 1 spielen muss um zu gewinnen. In beiden Spielen weist die Anfangsbelegung π_0 allen Variablen „falsch“ zu.

a) $\varphi = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg q_1) \vee (p_3 \wedge p_4 \wedge \neg q_2) \vee (\neg(p_1 \vee p_4) \wedge q_1 \wedge q_2)$,

$\Gamma_1 = \{p_1, \ldots, p_4\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

b) $\varphi = ((p_1 \leftrightarrow \neg q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow \neg q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \vee ((p_1 \leftrightarrow q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow \neg p_2))$,

$\Gamma_1 = \{p_1, p_2\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

4. (25 %) Betrachte folgenden vergeblichen Versuch, das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ *mit* TBoxen auf das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ *ohne* TBoxen zu reduzieren:

Gegeben seien ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C_0 in NNF und eine TBox $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_\mathcal{T}\}$; der Einfachheit halber seien C_0 und $C_\mathcal{T}$ wieder in NNF. Die Idee ist nun, zu „erzwingen", dass alle Punkte eines Modells $\mathcal{I}$ von C_0 auch Instanzen von $C_\mathcal{T}$ sind. Dazu fügt man $C_\mathcal{T}$ zu jedem Teilkonzept von C_0, das ein neues Element in $\mathcal{I}$ erfordert, per Konjunktion hinzu. Dazu definieren wir folgende Funktion f, die Konzepte auf Konzepte abbildet (A ist wie immer ein Konzept*name*):

$$\begin{array}{lll} f(A) = A & f(D_1 \sqcap D_2) = f(D_1) \sqcap f(D_2) & f(\exists r.D) = \exists r.(f(D) \sqcap C_\mathcal{T}) \\ f(\neg A) = \neg A & f(D_1 \sqcup D_2) = f(D_1) \sqcup f(D_2) & f(\forall r.D) = \forall r.f(D) \end{array}$$

Mit Hilfe von f wandelt man nun C_0 und $\mathcal{T}$ in $C_0^\mathcal{T} := f(C_0) \sqcap C_\mathcal{T}$ um. Sind zum Beispiel $C_0 = \exists r.A \sqcap \forall r.B$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq B'\}$, dann erhält man $C_0^\mathcal{T} = (\exists r.(A \sqcap B') \sqcap \forall r.B) \sqcap B'$.

Begründe:

a) Das Konzept $C_0^\mathcal{T}$ kann man in polynomieller Zeit konstruieren. (denn es gibt nur linear viele Teilkonzepte, und jeder Teilschritt benötigt konstante Zeit).

b) Diese Transformation stellt *keine* Reduktion dar, denn es gilt *nicht:*

$$C_0 \text{ ist erfüllbar bzgl. } \mathcal{T} \quad \text{gdw.} \quad C_0^\mathcal{T} \text{ ist erfüllbar} \qquad (*)$$

Gib dazu ein Konzept C_0 und eine TBox $\mathcal{T}$ an, die $(*)$ verletzen; begründe dies.

c) (ungewertet) Kann es überhaupt eine Reduktion vom Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen auf das Erfüllbarkeitsproblem für $\mathcal{ALC}$ ohne TBoxen geben?

Hinweis: Wenn Du Deine Kenntnisse über (Polynomialzeit-)Reduktionen auffrischen möchtest, kannst Du z. B. Def. 15.9 und 19.1 im Skript Theoretische Informatik 1 + 2 nachlesen: `http://tinyurl.com/ss16-theoinf`

5. Zusatzaufgabe (20 %) Erweitere den Typeliminationsalgorithmus aus der Vorlesung auf die Beschreibungslogik $\mathcal{ALCQ}$, also auf $\mathcal{ALC}$ mit Zahlenrestriktionen. Beweise werden nicht erwartet.