Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Beschreibungslogik Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

Thomas Schneider Sommersemester 2017

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ss17-bl

Beschreibungslogik SoSe 2017

 $\mathcal{EL}$ 

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Ziel des Kapitels

#### Für manche Anwendungen ist $\mathcal{ALC}$ zu komplex:

- Auch hoch-optimierte Reasoner können sehr große und komplexe Ontologien oft nicht verarbeiten (oder nur nach intensivem Tuning)
- In der Anfragebeantwortung muss man oft mit sehr großen Datenmengen umgehen und braucht schnelle Antworten (Kapitel 7)

#### Wir betrachten die Beschreibungslogik $\mathcal{EL}$ :

- viel weniger ausdrucksstark als  $\mathcal{ALC}$ , Basisoperatoren nur  $\sqcap$  und  $\exists r.C$
- Erfüllbarkeit und Subsumtion in Polyzeit entscheidbar

# Vorlesungsübersicht

Kapitel 1: Einleitung Kapitel 2: Grundlagen

Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Kapitel 4: Tableau-Algorithmen

Kapitel 5: Komplexität

Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1  $\mathcal{EL}$ 

Subsumtion ohne TBox

Subsumtion mit TBoxen

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

 $\mathcal{EL}$ Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$  $\mathcal{EL}$ Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

 $\mathcal{EL}$ 

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

- 1  $\mathcal{EL}$

§6 Effiziente Beschreibungslogiker

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

#### Simulation

**Intuitiv**:  $\mathcal{EL}$  ist die "Hälfte von  $\mathcal{ALC}$ ";

Simulation entspricht der "Hälfte von Bisimulation".

### Definition 6.2 (Simulation)

Seien  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  Interpretationen.

Relation  $\rho \subset \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$  ist **Simulation** von  $\mathcal{I}_1$  nach  $\mathcal{I}_2$ , wenn gilt:

• Wenn  $d_1 \rho d_2$ , dann gilt für alle Konzeptnamen A:

$$d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$$
 impliziert  $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$ 

Wenn  $d_1 \rho d_2$  und  $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$  für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein  $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$  mit  $d_1' \rho d_2'$  und  $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$ .

T 6.1

### Beachte:

Im Gegensatz zu Bisimulationen sind Simulationen gerichtet.

### Definition 6.1 ( $\mathcal{EL}$ )

Ein EL-Konzept ist ein ALC-Konzept, in dem nur die Konstruktoren  $\top$ ,  $\sqcap$  und  $\exists r.C$  verwendet werden.

 $\mathcal{EL}$  ist beliebt für biomedizinische Ontologien (die sind oft groß und mit hohem Abstraktionsgrad):

Perikardium 

□ Gewebe 

□ ∃teilVon.Herz

Perikarditis ≡ Entzündung □ ∃ort.Perikardium

SNOMED CT ist in unwesentlicher Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  formuliert.

 $\mathcal{EL}$  ist Grundlage des EL-Profils von OWL 2.

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

### Simulation

Seien  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ ,  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

Wir schreiben  $(\mathcal{I}_1, d_1) \lesssim (\mathcal{I}_2, d_2)$ , wenn es Simulation  $\rho$  von  $\mathcal{I}_1$  nach  $\mathcal{I}_2$  gibt mit  $d_1 \rho d_2$ (wir sagen:  $d_1$  wird simuliert von  $d_2$ ).

### Theorem 6.3

Beschreibungslogik SoSe 2017

Seien  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  und  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

Wenn  $(\mathcal{I}_1, d_1) \lesssim (\mathcal{I}_2, d_2)$ , dann gilt für alle  $\mathcal{EL}$ -Konzepte C:

 $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$  impliziert  $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$ 

T 6.2

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

ELC Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von ELC ELC Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

### Simulation vs. Bisimulation; Ausdrucksstärke

Intuitiv: Wenn  $(\mathcal{I}_1, d_1) \lesssim (\mathcal{I}_2, d_2)$  und  $(\mathcal{I}_2, d_2) \lesssim (\mathcal{I}_1, d_1)$ , dann kann  $\mathcal{EL}$  nicht zwischen  $d_1$  und  $d_2$  "unterscheiden".

### Achtung:

Bisimulation und wechselseitige Simulation sind nicht dasselbe:

### Lemma 6.4

Es gibt  $(\mathcal{I}_1, d_1)$  und  $(\mathcal{I}, d_2)$ , so dass:

- ullet  $(\mathcal{I}_1,d_1) \precsim (\mathcal{I}_2,d_2)$  und  $(\mathcal{I}_2,d_2) \precsim (\mathcal{I}_1,d_1)$
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$

T 6.3

Man kann nun wieder Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate zeigen:

#### Lemma 6.5

Das  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $\forall r.A$  ist **nicht** in  $\mathcal{EL}$  ausdrückbar.

T 6.3 Forts.

Beschreibungslogik SoSe 2017

EL Subsumtion ohne

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

- 1 EL
- 2 Subsumtion ohne TBox
- Subsumtion mit TBoxen
- 4 Erweiterungen von EL

# Schlussfolgerungsprobleme in $\mathcal{EL}$

In  $\mathcal{EL}$  ist Erfüllbarkeit kein interessantes Schlussfolgerungsproblem:

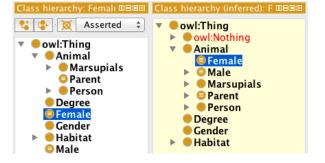
### Lemma 6.6

Jedes  $\mathcal{EL} ext{-}Konzept$  ist erfüllbar bzgl. jeder TBox.

T 6.4

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Darum konzentrieren wir uns auf **Subsumtion**.



Beschreibungslogik SoSe 2017

**§6 Effiziente Beschreibungslogiken**Subsumtion mit TB

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Intuition

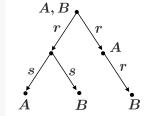
Eine Subsumtion  $C \sqsubseteq D$  gilt in  $\mathcal{EL}$  im Prinzip genau dann, wenn man D syntaktisch "in C wiederfindet".

z.B.: 
$$C = A \sqcap B$$
  
 $\sqcap \exists r. (\exists s.A \sqcap \exists s.B)$   
 $\sqcap \exists r. (A \sqcap \exists r.B)$ 

$$D = A$$

 $\sqcap \exists r. \exists s. \top$  $\sqcap \exists r. A$ 

Konzepte dargestellt als Bäume: "Wiederfinden" entspricht Simulation von D-Baum in C-Baum (Richtung!)



### Kanonisches Modell

#### Definition 6.7

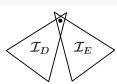
Wir ordnen induktiv jedem  $\mathcal{EL}$ -Konzept C eine Interpretation  $\mathcal{I}_C$  zu:

 $C = \top$ 

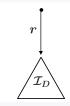
Modell  $\mathcal{I}_C$ : •

C = A

Modell  $\mathcal{I}_C$ :  $\bullet^A$ 



 $C = D \sqcap E$  Modell  $\mathcal{I}_C$ :



 $C = \exists r.D$ Modell  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ :

Subsumtion ohne TBox

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

T 6.7

# Charakterisierung von Subsumtion

Wir zeigen nun, dass  $C \sqsubseteq D$  gdw. man  $\mathcal{I}_D$  in  $\mathcal{I}_C$  "wiederfindet":

### Lemma 6.10

Für alle  $\mathcal{EL}$ -Konzepte C, D gilt:

$$C \sqsubseteq D$$
 gdw.  $(\mathcal{I}_D, d_W) \lesssim (\mathcal{I}_C, d_W)$ 

z. B.:

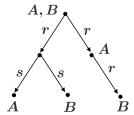
 $C = A \sqcap B$ 

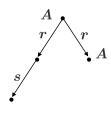
 $\sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B)$ 

 $\sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$ 

 $\sqcap \exists r. \exists s. \top$ 

 $\sqcap \exists r.A$ 





### Kanonisches Modell

Wir nennen  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  kanonisches Modell, bezeichnen Wurzel stets mit  $d_{\mathcal{W}}$  .

Subsumtion mit TBoxen

Man sieht leicht, dass  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  wirklich ein **Modell** ist:

#### Lemma 6.8

Für alle  $\mathcal{EL}$ -Konzepte C gilt:

Subsumtion ohne TBox

Die Interpretation  $\mathcal{I}_C$  ist Modell von C mit  $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$ .

T 6.5

Die zentrale Eigenschaft kanonischer Modelle:

#### Lemma 6.9

Für alle  $\mathcal{EL}$ -Konzepte C, Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$  gilt:

$$e \in C^{\mathcal{I}}$$
 gdw.  $(\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$ 

T 6.6

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von EL

Entscheidungsverfahren für Subsumtion

Folgendes Theorem formuliert den (recht einfachen) Algorithmus:

#### Theorem 6.11

Subsumtion in  $\mathcal{EL}$  kann in polynomieller Zeit entschieden werden:

- Konstruiere  $\mathcal{I}_C$  und  $\mathcal{I}_D$  in polynomieller Zeit.
- Überprüfe in polynomieller Zeit, ob  $(\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$ .

T 6.8

Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

1  $\mathcal{EL}$ 

Subsumtion mit TBoxen

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

#### Vereinfachende Annahme 1

Betrachten o. B. d. A. nur Subsumtion von Konzeptnamen bzgl. TBoxen.

#### Lemma 6.12

Seien C, D zwei beliebige  $\mathcal{EL}$ -Konzepte und  $\mathcal{T}$  eine  $\mathcal{EL}$ -TBox.

Sei weiterhin  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A_C \sqsubseteq C, D \sqsubseteq A_D\},\$ 

mit Konzeptnamen  $A_C$ ,  $A_D$ , die nicht in C, D,  $\mathcal{T}$  vorkommen.

Dann gilt:

 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  gdw.  $\mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$ 

(Übung)

Lemma 6.12 liefert Polyzeit-Reduktion

- von Subsumtion zwischen beliebigen Konzepten bzgl. TBoxen
- auf Subsumtion zwischen Konzeptnamen bzgl. TBoxen.

#### Intuition

Wir verwenden ein so genanntes konsequenzbasiertes Verfahren.

Subsumtion mit TBoxen

#### Grundidee:

Subsumtion ohne TBox

- Mit Hilfe von Regeln werden zur TBox nach und nach neue Konzeptinklusionen hinzugefügt.
- Am Ende muss man dann nur noch nachschauen, ob die gewünschte Subsumtion in der TBox explizit enthalten ist.

In der Praxis haben sich derartige Verfahren als äußerst effizient herausgestellt.

Sie sind verwandt mit Sequenzenkalkülen aus der klassischen Logik.

§6 Effiziente Beschreibungslogiker

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Annahme 2: Normalform

Betrachten o. B. d. A. nur TBoxen in folgender Normalform:

#### Definition 6.13

Eine TBox ist in Normalform (NF), wenn sie nur Inklusionen der Form

 $A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq A \qquad A \sqsubseteq \exists r. A_1 \qquad \exists r. A \sqsubseteq A_1$ 

enthält, wobei  $A, A_1, \ldots, A_n$  Konzeptnamen oder  $\top$  sind.

#### Lemma 6.14

Jede  $\mathcal{EL}$ -TBox  $\mathcal T$  kann in polynomieller Zeit in eine TBox  $\mathcal T'$  in NF gewandelt werden, so dass für alle Konzeptnamen A, B in T gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$$
 (\*)

Wenn (\*) gilt, sagen wir:  $\mathcal{T}'$  ist konservative Erweiterung von  $\mathcal{T}$ . Um die NF herzustellen, wenden wir Normalisierungsregeln an. T 6.9 Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

### Normalisierung

NF1 
$$C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E \leadsto C_i \sqsubseteq A_{C_i}$$
,  $C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_{i-1} \sqcap A_{C_i} \sqcap C_{i+1} \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E$  wenn  $C_i$  Existenzrestriktion

NF2  $\exists r.C \sqsubseteq E \leadsto C \sqsubseteq A_C$ ,  $\exists r.A_C \sqsubseteq E$ 

NF3  $C \sqsubseteq \exists r.D \leadsto C \sqsubseteq A_C$ ,  $A_C \sqsubseteq \exists r.D$ 

NF4  $A \sqsubseteq \exists r.C \leadsto A \sqsubseteq \exists r.A_C$ ,  $A_C \sqsubseteq C$ 

NF5  $A \sqsubseteq C_1 \sqcap C_2 \leadsto A \sqsubseteq C_1$ ,  $A \sqsubseteq C_2$ 

Wenn  $C$  weder Konzeptname noch  $T$ 

### Lemma 6.15

Jede  $\mathcal{EL}$ -TBox  $\mathcal{T}$  kann durch linear viele Regelanwendungen in TBox in NF transformiert werden, die konservative Erweiterung von  $\mathcal{T}$  ist.

T 6.10

§6 Effiziente Beschreibungslogiken 21 Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Saturierung

Für eine  $\mathcal{EL}$ -TBox  $\mathcal{T}$  sei  $\mathcal{T}^*$  das Ergebnis erschöpfender Regelanwendung. Wir nennen  $\mathcal{T}^*$  die Saturierung von  $\mathcal{T}$ .

 $\mathcal{T}^*$  macht alle Subsumtionen zwischen Konzeptnamen explizit:

#### Theorem 6.16

Für alle Konzeptnamen A, B in  $\mathcal{T}$  gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$$
 gdw.  $A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$ 

Der Algorithmus klassifiziert also die Konzeptnamen vollständig; berechnet nicht nur eine einzelne Subsumtion.

#### Theorem 6.17

Die Konstruktion von  $\mathcal{T}^*$  terminiert nach  $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|^2)$  vielen Regelanwendungen.

#### T 6.12

#### Erweiterungen von $\mathcal{EL}$

### Subsumtion mit TBox

Der Algorithmus beginnt mit der ursprünglichen TBox und wendet dann erschöpfend folgende Regeln an.

R1 
$$\frac{}{A \sqsubseteq A}$$
 wenn  $A$  in  $\mathcal{T}$  R2  $\frac{}{A \sqsubseteq T}$  wenn  $A$  in  $\mathcal{T}$  vorkommt

R3  $\frac{A \sqsubseteq A_1 \cdots A \sqsubseteq A_n \quad A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$ 

R4  $\frac{A \sqsubseteq \exists r.A_1 \qquad A_1 \sqsubseteq B_1 \qquad \exists r.B_1 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$ 

T 6.11

Beachte:  $A, A_1, \ldots, A_n, B$  sind Konzeptnamen oder  $\top$ .

Beschreibungslogik SoSe 2017 §6 Effiziente Beschreibungslogiken Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# Korrektheit des Algorithmus

Wir beweisen nun Theorem 6.16. Korrektheit:

#### Lemma 6.18

Für alle Konzeptnamen A, B in  $\mathcal{T}$  gilt:

$$A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$$
 impliziert  $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ 

#### Beweis.

Sei  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0, \ \mathcal{T}_1, \ \dots, \ \mathcal{T}_n = \mathcal{T}^*$  die durch Regelanwendung erzeugte Folge von TBoxen. Es genügt zu zeigen:

Beh.: Für alle 
$$i < n$$
 gilt:  $\mathcal{T}_i \models \mathcal{T}_{i+1}$   
(d. h.:  $\mathcal{T}_i \models C \sqsubseteq D$  für alle  $C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}_{i+1}$ )

T 6.13

Daraus folgt direkt  $\mathcal{T} \models \mathcal{T}^*$ .

Beschreibungslogik SoSe 2017

CL Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von EL EL Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

# Vollständigkeit

Konstruieren ein einziges Modell, das alle  $\,$  nicht aus  $\mathcal{T}$  folgenden Subsumtionen zwischen Konzeptnamen  $\,$  gleichzeitig falsch  $\,$  macht.

Existenz solcher kanonischer Modelle ist zentrale Eigenschaft von  $\mathcal{EL}$ .

#### Definition 6.19

Die kanonische Interpretation  $\mathcal I$  ist wie folgt definiert:

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{ d_A \mid A \text{ Konzeptname in } \mathcal{T}^* \} \cup \{ d_{\top} \}$$

$$A^{\mathcal{I}} = \{ d_B \mid B \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^* \}$$

$$r^{\mathcal{I}} = \{ (d_A, d_B) \mid A \sqsubseteq A' \in \mathcal{T}^* \text{ und } A' \sqsubseteq \exists r.B \in \mathcal{T}^*,$$

$$A' \text{ Konzeptname} \} \text{ T 6.14}$$

#### Lemma 6.20

Die kanonische Interpretation  $\mathcal{I}$  ist ein Model von  $\mathcal{T}^*$ .

T 6.15

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

hsumtion mit TRoyen

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

25 in *EL* 

# Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken

- 1 EL
- 2 Subsumtion ohne TBox
- Subsumtion mit TBoxen
- 4 Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$

# Vollständigkeit

Jetzt zeigt man leicht:

#### Lemma 6.21

Für alle Konzeptnamen A, B in  $\mathcal{T}$  gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \text{impliziert} \quad A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$$

Beweis. Angenommen  $A \sqsubseteq B \notin \mathcal{T}^*$ .

(\*)

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Betrachte Element  $d_A$  der kanonischen Interpretation  $\mathcal{I}$ .

Wegen R1 ist  $A \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^*$ , also  $\mathbf{d}_A \in \mathbf{A}^{\mathcal{I}}$ .

Def. von  $\mathcal{I}$  und (\*) liefert  $\mathbf{d}_{\mathbf{A}} \notin \mathbf{B}^{\mathcal{I}}$ .

Da  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}^*$  (Lemma 6.20) und damit von  $\mathcal{T}$  ist, folgt  $\mathcal{T} \not\models A \sqsubseteq B$ .

Beschreibungslogik SoSe 2017

 $\S 6$  Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

"Gute" und "schlechte" Erweiterungen

- $\stackrel{\longleftarrow}{\bullet}$  Der Algorithmus kann angepasst werden an  $\mathcal{EL}$  erweitert mit:
  - ⊥
  - "Range Restrictions"  $\top \sqsubseteq \forall r.C$  und "Domain Restrictions"  $\top \sqsubseteq \forall r^-.C$
  - Rolleninklusionen mit Verkettung:  $r_1 \circ \cdots \circ r_n \sqsubseteq r$
  - . . .

Dies (und mehr) ist im EL-Profil von OWL 2 realisiert.

 $\blacksquare$  Viele andere Erweiterungen sind jedoch ExpTIME-vollständig (wie  $\mathcal{ALC}$ ).

Wir betrachten exemplarisch

- $\mathcal{ELU}$ , die Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  mit  $\sqcup$
- $\mathcal{EL}_{\forall}$ , die Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  mit  $\forall r.C$
- $\mathcal{EL}^{\geqslant 2}$ , die Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  mit  $\geqslant 2 r. \top$

C Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von EC EC Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

# ${\cal EL}$ mit Disjunktion und $\perp$

### Theorem 6.22

Erfüllbarkeit in  $\mathcal{ELU}_{\perp}$  bzgl. TBoxen ist ExpTIME-vollständig.

### Beweis.

Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptnamen A bzgl.  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$ 

Schritt 1. Ersetze in  $\mathcal T$  alle Werte- durch Existenzrestriktionen:

$$\forall r.C$$
 wird  $\neg \exists r. \neg C$ 

Schritt 2. Modifiziere  $\mathcal T$  so, dass  $\neg$  nur vor Konzeptnamen auftritt:

z. B. 
$$A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg \exists r.B)$$
 wird  $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg X)$   
  $X \equiv \exists r.B$   
  $(X \text{ neuer Konzeptname})$ 

 Beschreibungslogik SoSe 2017
 §6 Effiziente Beschreibungslogiken
 2

  $\mathcal{L}$  Subsumtion ohne TBox
 Subsumtion mit TBoxen
 Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

# EL mit Disjunktion

### Theorem 6.24

Subsumtion in ELU bzgl. TBoxen ist ExpTIME-vollständig.

#### Beweis.

Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptnamen A bzgl.  $\mathcal{ELU}_{\perp}$ -TBox  $\mathcal{T}$  Konstruiere  $\mathcal{ELU}$ -TBox  $\mathcal{T}'$ :

- nimm o. B. d. A. an, dass  $\bot$  nur in der Form  $C \sqsubseteq \bot$  vorkommt (jedes  $\mathcal{ELU}_\bot$ -Konzept ist äquivalent zu  $\mathcal{ELU}$ -Konzept oder  $\bot$ )
- ersetze ⊥ durch neuen Konzeptnamen *L* T 6.17
- füge hinzu:

 $\exists r.L \sqsubseteq L$  für alle Rollennamen r in  $\mathcal{T}$ 

#### Lemma 6.25

A unerfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$  gdw.  $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq L$ .

T 6.18

## $\mathcal{EL}$ mit Disjunktion und $\bot$

**Schritt 3.** Entferne Negation vollständig aus  $\mathcal{T}$ :

- Ersetze jedes  $\neg X$  durch neuen Konzeptnamen  $\overline{X}$
- Erzwinge korrektes Verhalten der  $\overline{X}$ :

$$\top \sqsubseteq X \sqcap \overline{X}$$
$$X \sqcup \overline{X} \sqsubseteq \bot$$

Die resultierende  $\mathcal{ELU}_{\perp}$ -TBox sei  $\mathcal{T}'$ .

#### Lemma 6.23

Für alle Konzeptnamen A gilt:

A erfüllbar bzgl.  $\mathcal T$  gdw. A erfüllbar bzgl.  $\mathcal T'$ 

T 6.16

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

 Beschreibungslogik SoSe 2017
 §6 Effiziente Beschreibungslogiken
 3

 ELC
 Subsumtion ohne TBox
 Subsumtion mit TBoxen
 Erweiterungen von ELC

## **EL** mit Werterestriktionen

 $\mathcal{EL}^{\forall}$  ist  $\mathcal{EL}$  erweitert um  $\forall r.C$ .

#### Theorem 6.26

In  $\mathcal{EL}^\forall$  ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTIME-vollständig.

#### **Beweis:**

Reduktion von Subsumtion zwischen Konzeptnamen bzgl.  $\mathcal{ELU}$ -TBox  $\mathcal{T}$  Können annehmen, dass  $\sqcup$  nur in den folgenden Formen vorkommt:

• 
$$A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A \quad \sim \quad \text{Ersetze durch} \quad A_1 \sqsubseteq A, \quad A_2 \sqsubseteq A$$

• 
$$A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2 \quad \leadsto \quad \text{Ersetze durch} \quad \begin{array}{l} A \sqcap \exists r. \top \sqsubseteq B_1 \\ A \sqcap \forall r. X \sqsubseteq B_2 \end{array} \quad r, X \text{ neu} \end{array}$$

Die resultierende  $\mathcal{EL}^{\forall}$ -TBox sei  $\mathcal{T}'$ .

#### Lemma 6.27

 $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$  gdw.  $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$ .

T 6.19

Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

 $\mathcal{EL}$  mit Zahlenrestriktionen

 $\mathcal{EL}^{\geqslant 2}$  ist  $\mathcal{EL}$  erweitert um  $\geqslant 2 r. \top$ .

Theorem 6.28

In  $\mathcal{EL}^{\geq 2}$  ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTIME-vollständig.

Beweis: Wieder Reduktion von **ELU-Subsumtion** 

Können annehmen, dass ⊔ nur in den folgenden Formen vorkommt:

• 
$$A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A \quad \leadsto \quad \text{Ersetze durch} \quad A_1 \sqsubseteq A, \quad A_2 \sqsubseteq A$$

• 
$$A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2 \quad \leadsto \quad \text{Ersetze durch} \quad A \sqsubseteq \exists r. X \sqcap \exists r. Y \\ \qquad \qquad \qquad A \sqcap \exists r. (X \sqcap Y) \sqsubseteq B_1 \\ \qquad \qquad \qquad (r, X, Y \text{ neu}) \quad A \sqcap \geqslant 2 r. \top \sqsubseteq B_2$$

Die resultierende  $\mathcal{EL}^{\forall}$ -TBox sei  $\mathcal{T}'$ .

Lemma 6.29

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$$
 gdw.  $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$ .

(Übung)

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

33

Zusammenfassung für  $\mathcal{EL}$ 

Die  $\mathcal{EL}$ -Familie von BLen:

- Erlaubt Schlussfolgern in polynomieller Zeit
- Es gibt viele Reasoner wie ELK, CEL, SNOROCKET
- Skaliert auch auf große Terminologien wie SNOMED CT (> 400.000 Konzepte, wird in wenigen Sekunden klassifiziert)
- Stellt viele Operatoren zur Verfügung, hat aber eingeschränktes Ausdrucksvermögen (z. B. kann keine Disjunktion ausgedrückt werden – Konvexität!)

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Konvexität

Eine Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  ist konvex, wenn für alle TBoxen  $\mathcal{T}$  und Konzepte  $C, D_1, D_2$  gilt:

 $\mathcal{T} \models \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2$  impliziert  $\mathcal{T} \models \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}_1$  oder  $\mathcal{T} \models \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{D}_2$ 

 $\mathcal{EL}^{\forall}$  ist nicht konvex:

$$\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq \exists r. \top \sqcup \forall r. X$$
 aber  $\mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \exists r. \top$  und  $\mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \forall r. X$ 

Unsere Beweise zeigen im Prinzip: iede nicht-konvexe Erweiterung von  $\mathcal{EL}$  ist ExpTIME-hart.

Aber auch konvexe Erweiterungen sind nicht zwangsläufig in PTIME: Z. B. ist  $\mathcal{ELI}$  ( $\mathcal{EL}$  "plus"  $\exists r^-.C$ ) konvex, aber ExpTIME-vollst.

Für konvexe Erweiterungen gibt es oft effiziente konsequenzbasierte Algorithmen.

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

Literatur für dieses Kapitel (Basis)

Franz Baader, Ian Horrocks, Carsten Lutz, Uli Sattler.

An Introduction to Description Logic.

Cambridge University Press, 2017.

Kapitel 6: Reasoning in the  $\mathcal{EL}$  Family of DLs

In SUUB verfügbar: http://tinyurl.com/suub-intro-dl

Bestellung beim Verlag: http://www.cambridge.org/9780521695428

Ich habe auch ein Exemplar - meldet Euch bei Bedarf gern.

EL Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen Erweiterungen von EL EL Subsumtion ohne TBox Subsumtion mit TBoxen

# Literatur für dieses Kapitel (weiterführend 1)



Franz Baader, Sebastian Brandt, Carsten Lutz.

Pushing the  $\mathcal{EL}$  Envelope.

IJCAI 2005: 364-369.

http://ijcai.org/Proceedings/05/Papers/0372.pdf

Untersucht systematisch Erweiterungen von  $\mathcal{E}\mathcal{L},$  die in Polyzeit

bleiben oder höhere Komplexität verursachen.

Technischer Report mit Beweisdetails: http://lat.inf.tu-dresden.de/research/reports/2005/BaaderBrandtLutz-LTCS-05-01.ps.gz



Franz Baader, Sebastian Brandt, Carsten Lutz.

Pushing the  $\mathcal{EL}$  Envelope Further.

OWLED (Spring) 2008.

http://ceur-ws.org/Vol-496/owled2008dc\_paper\_3.pdf

Führt die vorangegangene Arbeit fort.

Beschreibungslogik SoSe 2

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

3

Subsumtion mit I boxer

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$ 

### Links für dieses Kapitel



University of Manchester

OWL API

http://owlcs.github.io/owlapi/

https://github.com/owlcs/owlapi/wiki (Wiki + Doku.)

Die API der Wahl, um mit Ontologien zu arbeiten.



University of Manchester

List of Reasoners

http://owl.cs.manchester.ac.uk/tools/list-of-reasoners/

Eine aktuelle Übersicht von DL-Reasonern

(die speziell für  $\mathcal{EL}$  entwickelten haben meist ein "EL" im Namen)

# Literatur für dieses Kapitel (weiterführend 2)

Boontawee Suntisrivaraporn.

Optimization and Implementation of Subsumption Algorithms for the Description Logic  $\mathcal{EL}$  with Cyclic TBoxes and General Concept Inclusion Axioms.

Masterarbeit, TU Dresden, 2005.

https://lat.inf.tu-dresden.de/research/mas/Sun-Mas-05.pdf Erklärt anschaulich Normalisierung und Klassifikation für  $\mathcal{EL}$  (ohne Erweiterungen). Allerdings weichen die Regeln etwas von denen aus der Vorlesung ab; "unsere" sind besser optimiert.

Beschreibungslogik SoSe 2017

§6 Effiziente Beschreibungslogiken

---

Erweiterungen von  $\mathcal{EL}$