Beschreibungslogik
Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Sommersemester 2017 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ss17-bl

Vorlesungsübersicht

Ziel des Kapitels

Die wichtigsten Eigenschaften einer BL sind

- **Ausdrucksstärke** und
- **Komplexität**

Die Aussdrucksstärke kann man **nicht linear quantifizieren,** sondern nur **beschreiben und charakterisieren.**

Wir werden nun

- mehrere Konstruktionen auf Modellen etablieren und
- diese verwenden, um die Aussdrucksstärke von BLen zu studieren.

Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Überblick

Bisimulation ist graphentheoretischer Begriff;
beschreibt die „Ähnlichkeit“ von Graphen.

Hängt eng zusammen mit der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$.

Wir formalisieren den Zusammenhang und betrachten zwei Anwendungen:

- Beweis der **Nicht-Ausdrückbarkeit** von Eigenschaften
- **Baummodelleigenschaft**

Bisimulation: Definition

Definition 3.1 (Bisimulation)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen.

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist **Bisimulation** zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$, wenn gilt:

1. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$, dann gilt für alle Konzeptnamen A:
$$d_1 \in A^{\mathcal{I}_1} \qquad \text{gdw.} \qquad d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$$
2. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$.
3. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$.

T 3.1

Bisimulationstheorem

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$: es gibt Bisimulation ρ zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mit $d_1 \; \rho \; d_2$ (wir sagen: d_1 ist **bisimilar** zu d_2).

Beachte: die leere Relation ist immer Bisimulation!

Theorem 3.2

Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C:

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \qquad \textit{gdw.} \qquad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

T 3.2

Intuitiv: $\mathcal{ALC}$ kann nicht zwischen d_1 und d_2 „unterscheiden".

Ausdrucksstärke

Wir interessieren uns für Eigenschaften von Elementen d in Interpretationen $\mathcal{I}$.

Definition 3.3 (Eigenschaft, Ausdrückbarkeit)

Eine **Eigenschaft** E ist eine Menge von Paaren $(\mathcal{I}, d)$, wobei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ein Element in $\mathcal{I}$ ist.

E ist **in $\mathcal{ALC}$ ausdrückbar**, wenn es ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt, so dass für alle $\mathcal{I}$ und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$(\mathcal{I}, d) \in E \qquad \text{gdw.} \qquad d \in C^{\mathcal{I}}$$

Intuitionen:

- $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ hat die Eigenschaft E gdw. $(\mathcal{I}, d) \in E$.
- E ist ausdrückbar, wenn es ein **äquivalentes** $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt.

Ausdrucksstärke

Typische Eigenschaften,
für deren Ausdrückbarkeit wir uns interessieren:

- d hat einen r-Nachfolger in $\mathcal{I}$
- es gibt einen von d ausgehenden endlichen r-Pfad in $\mathcal{I}$, dessen letztes Element Instanz von C ist
- jedes Element von $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist r-Nachfolger von d

Eigenschaft kann auch in logischem Formalismus gegeben sein, z. B.:

- $\exists r^{-}.A$
- $\exists y\,(r(y,x) \wedge A(y))$

Verwendung von Bisimulation I

Beschränkungen der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$ beweisen.

Das ist schwierig mit syntaktischen Argumenten,
aber Bisimulation erlaubt **semantisches Argument!**

Theorem 3.4

*In $\mathcal{ALC}$ sind **nicht ausdrückbar:***

- *das $\mathcal{ALCI}$-Konzept $\exists r^{-}.\top$*
- *die $\mathcal{ALCQ}$-Konzepte*
  - $\leqslant n\, r.\top$, *für alle* $n > 0$
  - $\geqslant n\, r.\top$, *für alle* $n > 1$

T 3.3

Verwendung von Bisimulation I

Im Beweis von Theorem 3.4 gesehen:

Die Argumentation zum Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit läuft immer auf dasselbe hinaus:

Theorem 3.5

Sei E eine Eigenschaft. Wenn es Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ und Elemente $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ gibt, so dass

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ *und* $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$ *sowie*
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$,

dann ist E nicht in $\mathcal{ALC}$ ausdrückbar.

Verwendung von Bisimulation II

Nachweis der Baummodelleigenschaft

- Interpretation $\mathcal{I}$ ist **Baum**, wenn $(\Delta^{\mathcal{I}}, \bigcup_r r^{\mathcal{I}})$ Baum ist.
  (endlich oder unendlich)
- Konzept C und TBox $\mathcal{T}$ haben **gemeinsames Baummodell** $\mathcal{I}$, wenn $\mathcal{I}$ Modell von $\mathcal{T}$ und Baum mit Wurzel d sowie $d \in C^{\mathcal{I}}$.

$\mathcal{ALC}$ hat die *Baummodelleigenschaft*:

Theorem 3.6

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Baummodell $\mathcal{I}$.

T 3.4

Ist Grundlage für Algorithmen, erlaubt Aussagen über Ausdrucksstärke.

Beweis mittels fundamentaler Modellkonstruktion: **Unravelling**.

Verwendung von Bisimulation II

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

***d*-Pfad in $\mathcal{I}$:** Sequenz $d_1 d_2 \cdots d_n$, $n \geq 1$, mit $d_1 = d$ und

für alle $i < n$: es gibt Rollenname r mit $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$ **T 3.5**

$\mathbf{end}(d_1 d_2 \cdots d_n) = d_n$

Definition 3.7 (Unravelling)

Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\Delta^{\mathcal{J}} = \text{Menge aller } d\text{-Pfade in } \mathcal{I}$$

$$A^{\mathcal{J}} = \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \text{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\}$$

$$r^{\mathcal{J}} = \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid \text{es gibt } e : p' = p \cdot e \text{ und } (\text{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}$$

für alle Konzeptnamen A und Rollennamen r.

T 3.5 Forts.

Verwendung von Bisimulation II

Sei $\mathcal{J}$ Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d.

Lemma 3.8

Für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\mathsf{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \qquad \textit{gdw.} \qquad p \in C^{\mathcal{J}}$$

T 3.6

Es folgt Theorem 3.6:

Theorem 3.6 (wiederholt)

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Baummodell $\mathcal{I}$.

T 3.7

Baummodelleigenschaft gilt **nicht** in Prädikatenlogik 1. Stufe (FO).

Bisimulation versus Ausdrucksstärke

Entsprechen Bisimulationen *genau* der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$?

Nein!

Gegenrichtung von Thm. 3.2 (also auch von Thm. 3.5) gilt nicht:

Es gibt Interpretationen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ und $d \in \mathcal{I}$, $e \in \mathcal{J}$, so dass

- $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $e \in C^{\mathcal{J}}$ für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C,
- aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$.

T 3.8

Sie gilt allerdings für bestimmte Klassen von Interpretationen, z. B.:

- die Klasse aller endlichen Interpretationen
- die Klasse aller Interpretationen mit endlicher Verzweigungszahl

$\vdots$

Solche Klassen nennt man **Henessy-Milner-Klassen.**

Bisimulation für Erweiterungen von $\mathcal{ALC}$

Für $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCQ}$, $\mathcal{ALCQI}$ gibt es auch Bisimulationsbegriffe.

Zusätzliche Bedingungen für $\mathcal{ALCI}$:

4. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$.
5. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$.

Dann gilt Theorem 3.2 und man kann z. B.
eine Variante der Baummodelleigenschaft für $\mathcal{ALCI}$ beweisen.
(Kanten im Baum können auch zur Wurzel gerichtet sein)

Auch $\mathcal{ALCQ}$ und $\mathcal{ALCQI}$ haben die Baummodelleigenschaft.

Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Überblick

Endliche Modelleigenschaft: wenn C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$,
dann haben C und $\mathcal{T}$ auch *endliches* gemeinsames Modell.

Filtration wandelt Modell von Konzept und TBox in endliches Modell.

Zentrale Idee: Identifikation **ununterscheidbarer** Elemente
(im Sinne von: erfüllen dieselben Konzepte)

Größe von Konzepten und TBoxen

Definition 3.9

Die **Größe $|C|$ eines $\mathcal{ALC}$-Konzeptes C** ist induktiv definiert:

$$
\begin{aligned}
|A| &= 1 \\
|\neg C| &= |C| + 1 \\
|C \sqcap D| = |C \sqcup D| &= |C| + |D| + 1 \\
|\exists r.C| = |\forall r.C| &= |C| + 3
\end{aligned}
$$

Die **Größe $|\mathcal{T}|$ einer TBox $\mathcal{T}$** ist:

$$\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1$$

Intuitiv: Anzahl Symbole in C bzw. $\mathcal{T}$

Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

$\mathcal{ALC}$ hat **endliche Modelleigenschaft:**

Theorem 3.10

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames ***endliches*** *Modell.*

$\mathcal{ALC}$ hat sogar **beschränkte Modelleigenschaft:**

Theorem 3.11

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der ***Kardinalität*** $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Typen: Intuition

Im Folgenden sei C $\mathcal{ALC}$-Konzept und $\mathcal{T}$ TBox, so dass C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$.

Wir benutzen Typen. Ein Typ ...

- ist Menge von Konzepten
- beschreibt einen Punkt $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ in einer Interpretation $\mathcal{I}$
- ist eingeschränkt auf **Teilkonzepte** von C und $\mathcal{T}$ (um Endlichkeit zu erreichen)

Typen sind zentral für viele Techniken in Beschreibungslogik.

Teilkonzepte

Definition 3.12 (Teilkonzepte)

- **sub(C)** ist Menge der Teilkonzepte von C, einschließlich C.
- **sub($\mathcal{T}$)** $:= \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \text{sub}(C) \cup \text{sub}(D)$
- **sub($C, \mathcal{T}$)** $:= \text{sub}(C) \cup \text{sub}(\mathcal{T})$

T 3.9

Lemma 3.13

$|\text{sub}(C, \mathcal{T})| \leq |C| + |\mathcal{T}|$

Beweis: per Induktion über C (siehe Übungen)

Typen: Definition

Definition 3.14 (Typ von d)

Sei $\mathcal{I}$ Interpretation, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Der **Typ $t_{\mathcal{I}}(d)$ von d in $\mathcal{I}$** ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}.$$

T 3.10

Lemma 3.15

Für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: $\#\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$

(direkte Konsequenz aus Lemma 3.13)

Filtration: Idee

- Gegeben Interpretation $\mathcal{I}$,
  identifiziere alle Elemente gleichen Typs.
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor.
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$ viele Typen.
- Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch das Resultat.

Filtration

Definition 3.16 (Filtration)

Sei $\mathcal{I}$ Interpretation. Definiere Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Delta^{\mathcal{I}}$:

$$\boldsymbol{d \sim e} \quad \text{gdw.} \quad t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e)$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzgl. $\sim$ mit $\boldsymbol{[d]}$.

Die **Filtration von $\mathcal{I}$ bzgl. C und $\mathcal{T}$** ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \\
A^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\} \quad \text{für alle } A \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \\
r^{\mathcal{J}} &= \{([d], [e]) \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\} \\
&\quad\ \text{für alle Rollennamen } r
\end{aligned}$$

($A^{\mathcal{J}}$ ist wohldefiniert: Repräsentantenunabhängigkeit) **T 3.10 Forts.**

Theorem 3.17

Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch $\mathcal{J}$. **T 3.11**

Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

Theorem 3.11 folgt nun unmittelbar aus Thm. 3.17 und Lem. 3.15.

Theorem 3.11 (wiederholt)

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Ähnliche Resultate lassen sich für $\mathcal{ALCI}$ und $\mathcal{ALCQ}$ beweisen.
(mit derselben Schranke)

Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

Im Kontrast zu $\mathcal{ALC}$:

Theorem 3.18

*$\mathcal{ALCQI}$ hat **nicht** die endliche Modelleigenschaft.*

Beweis:

A hat bzgl. folgender TBox nur unendliche Modelle:

$$\begin{aligned} \top &\sqsubseteq \exists r.\neg A \\ \top &\sqsubseteq \leqslant 1\, r^-.\top \end{aligned}$$

T 3.12

Filtration ist also nicht für $\mathcal{ALCQI}$ anwendbar.

Entscheidbarkeit

Theorem 3.11 (wiederholt)

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Daraus folgt, dass Erfüllbarkeit entscheidbar ist:

Algorithmus für Erfüllbarkeit:

Gegeben C und $\mathcal{T}$, so dass $|C| + |\mathcal{T}| = n$,

- Erzeuge alle Interpretation $\mathcal{I}$ mit $|\Delta|^{\mathcal{I}} \leq 2^n$ (es gibt „nur“ höchstens $2^{2^{5n}}$ viele davon). **T 3.13**
- Überprüfe, ob $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$ ist (in Zeit polynomiell in $\mathcal{I}$, C und $\mathcal{T}$).

Entscheidbarkeit

Lemma 3.19

Gegeben sei $\mathcal{ALC}$-Konzept C und endl. Interpretation $\mathcal{I}$.

Man kann in polynomieller Zeit — genauer: in Zeit $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ — die Extension $C^{\mathcal{I}}$ berechnen.

Korollar 3.20

Gegeben seien C, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{ALC}$ und endl. Interpretation $\mathcal{I}$.

Man kann in polynomieller Zeit
— genauer: in Zeit $\mathcal{O}((|\mathcal{T}| + |C|) \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ —
*entscheiden, ob $\mathcal{I}$ ein Modell von C **und $\mathcal{T}$** ist.*

(d. h.: *Model checking* ist in Polynomialzeit)

Entscheidbarkeit

Beweis von Lemma 3.19.
Folgender rekursiver Algorithmus berechnet Extension von C in $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{procedure } \textbf{ext}(C, \mathcal{I}) & & \\
\texttt{case } & C = A: & \texttt{return } A^{\mathcal{I}} \\
& C = \neg D: & \texttt{return } \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \textbf{ext}(D, \mathcal{I}) \\
& C = D \sqcap E: & \texttt{return } \textbf{ext}(D, \mathcal{I}) \cap \textbf{ext}(E, \mathcal{I}) \\
& C = D \sqcup E: & \texttt{return } \textbf{ext}(D, \mathcal{I}) \cup \textbf{ext}(E, \mathcal{I}) \\
& C = \exists r.D: & \texttt{return } \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists e \in \textbf{ext}(D, \mathcal{I}) : (d, e) \in r^{\mathcal{I}}\} \\
& C = \forall r.D: & \texttt{return } \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall e \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} : e \in \textbf{ext}(D, \mathcal{I})\} \\
\texttt{endcase} & &
\end{array}
$$

Zeitaufwand dieses Algorithmus ist $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$:

- Anzahl der (rekursiven) Aufrufe $= |\text{sub}(C)| \leq |C|$
- pro Aufruf Zeitaufwand $\mathcal{O}(|\Delta^{\mathcal{I}}|)$:
  simple Operationen auf ≤ 2 Teilmengen von $\Delta^{\mathcal{I}}$

Entscheidbarkeit

Theorem 3.21

In $\mathcal{ALC}$ ist Erfüllbarkeit bzgl. TBoxen entscheidbar.

Komplexität: 2-ExpTime (doppelt exponentielle Zeit)

- 2-exponentiell viele Interpretationen müssen geprüft werden.
- Jede Prüfung braucht polynomielle Zeit.

Dieser Ansatz ist **kaum tauglich für die Praxis:**

- Die Komplexität ist höher als nötig.
- Das Aufzählen aller Modelle ist nicht praktikabel.

Literatur für dieses Kapitel

F. Baader, I. Horrocks, C. Lutz, U. Sattler.
An Introduction to Description Logic.
Cambridge University Press, 2007.

Kapitel 3: A Little Bit of Model Theory

Demnächst in SUUB verfügbar:
`http://tinyurl.com/suub-intro-dl`

Bestellung beim Verlag:
`http://www.cambridge.org/9780521695428`

Ich habe ein Exemplar und lasse Euch auf Nachfrage gern reinschauen.