Beschreibungslogik
Kapitel 2: Grundlagen

Sommersemester 2017 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ss17-bl

Vorlesungsübersicht

Kapitel 2: Grundlagen

Kapitel 2: Grundlagen

$\mathcal{ALC}$

Es gibt viele verschiedene Beschreibungslogiken:

- viele mögliche Kompromisse bzgl. Ausdrucksstärke vs. Komplexität des Schlussfolgerns
- verschiedene Anwendungen haben unterschiedliche Anforderungen

Hier zunächst $\mathcal{ALC}$:

- die einfachste BL mit allen Booleschen Konstruktoren
- eingeführt 1991 von Manfred Schmidt-Schauß & Gert Smolka
- steht für *Attributive (Concept) Language with Complement*

$\mathcal{ALC}$

Wir fixieren von nun an

- eine abzählbar unendliche Menge von **Konzeptnamen**

  Diese bezeichnen Klassen / unäre Prädikate

  z. B. Person, Kurs, Universität, Tafel, Student, etc.

- eine abzählbar unendliche Menge von **Rollennamen**

  Diese bezeichnen Relationen / binäre Prädikate

  z. B. hört, lehrt, istTeilVon, etc.

Wir nehmen die beiden Mengen als disjunkt an und unterscheiden Konzept- und Rollennamen über Groß- / Kleinschreibung.

$\mathcal{ALC}$

Konzepte dienen der *Beschreibung* einer Klasse von Objekten, sind zusammengesetzt aus

- Konzeptnamen
- Rollennamen
- Konzeptkonstruktoren
- (manchmal auch Rollenkonstruktoren)

Es gibt viele verschiedene Konstruktoren.

Verschiedene Konstruktormengen ergeben verschiedene Beschreibungslogiken.

$\mathcal{ALC}$: Syntax

Definition 2.1 ($\mathcal{ALC}$-Konzepte)

Die Menge der $\mathcal{ALC}$-**Konzepte** ist induktiv definiert:

- Jeder Konzeptname ist $\mathcal{ALC}$-Konzept.
- Wenn C, D $\mathcal{ALC}$-Konzepte, so auch
  - $\neg C$ (Negation)
  - $C \sqcap D$ (Konjunktion)
  - $C \sqcup D$ (Disjunktion)
- Wenn C $\mathcal{ALC}$-Konzept und r Rollenname, so sind
  - $\exists r.C$ (Existenzrestriktion)
  - $\forall r.C$ (Werterestriktion)

  $\mathcal{ALC}$-Konzepte.

T 2.1

$\mathcal{ALC}$: Syntax

Verwendete Symbole:

- A, B für Konzeptnamen
- C, D für zusammengesetzte Konzepte
- r, s für Rollennamen

Zwei nützliche Abkürzungen: wir schreiben

- $\top$ für $A \sqcup \neg A$
- $\bot$ für $A \sqcap \neg A$

wobei A ein beliebiger Konzeptname ist.

$\mathcal{ALC}$: Syntax

Präzedenzregel:

$\neg, \exists, \forall$ binden stärker als $\sqcap$ und $\sqcup$

Also zum Beispiel:

$\forall r.(\exists r.A \sqcap B)$ steht für $\forall r.((\exists r.A) \sqcap B)$
und nicht für $\forall r.(\exists r.(A \sqcap B))$

Keine Präzedenz zwischen $\sqcap$ und $\sqcup$ $\rightsquigarrow$ Klammern verwenden!

$\mathcal{ALC}$: Semantik

Definition 2.2 ($\mathcal{ALC}$-Semantik)

Eine *Interpretation* $\mathcal{I}$ ist Paar $(\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I})$ mit

- $\Delta^\mathcal{I}$ nicht-leere Menge (*Domäne*)
- $\cdot^\mathcal{I}$ *Interpretationsfunktion* bildet ab:
  - jeden Konzeptnamen A auf Menge $A^\mathcal{I} \subseteq \Delta^\mathcal{I}$
  - jeden Rollennamen r auf Relation $r^\mathcal{I} \subseteq \Delta^\mathcal{I} \times \Delta^\mathcal{I}$ **T 2.2**

Abbildung $\cdot^\mathcal{I}$ wird induktiv auf zusammengesetzte Konzepte erweitert:

$$(\neg C)^\mathcal{I} = \Delta^\mathcal{I} \setminus C^\mathcal{I}$$

T 2.2 Forts.

$$(C \sqcap D)^\mathcal{I} = C^\mathcal{I} \cap D^\mathcal{I} \qquad (C \sqcup D)^\mathcal{I} = C^\mathcal{I} \cup D^\mathcal{I}$$

$$(\exists r.C)^\mathcal{I} = \{d \in \Delta^\mathcal{I} \mid \text{es gibt } e \in \Delta^\mathcal{I} \text{ mit } (d,e) \in r^\mathcal{I} \text{ und } e \in C^\mathcal{I}\}$$

$$(\forall r.C)^\mathcal{I} = \{d \in \Delta^\mathcal{I} \mid \text{für alle } e \in \Delta^\mathcal{I}, (d,e) \in r^\mathcal{I} \text{ impliziert } e \in C^\mathcal{I}\}$$

$\mathcal{ALC}$: Semantik

Verwendete Symbole:

- $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ für Interpretationen
- d, e für Elemente der Domäne

Für Interpretationen verwenden wir übliche Terminologie für Graphen:

- e ist ***r*-Nachfolger** von d (in $\mathcal{I}$) wenn $(d, e) \in r^\mathcal{I}$.
- e ist ***r*-Vorgänger** von d (in $\mathcal{I}$) wenn $(e, d) \in r^\mathcal{I}$.
- Wenn r unwichtig, sprechen wir nur von **Nachfolgern**/**Vorgängern**.
- $\mathcal{I}$ ist **endlich** gdw. $\Delta^\mathcal{I}$ endlich ist.

Extension/Modell

Wir nennen

- $C^{\mathcal{I}}$ die **Extension** des Konzeptes C;
- jedes $d \in C^{\mathcal{I}}$ eine **Instanz** des Konzeptes C;
- $r^{\mathcal{I}}$ die **Extension** der Rolle r.

Beachte:

- $\top^{\mathcal{I}}$ ist für jede Interpretation $\mathcal{I}$ identisch mit $\Delta^{\mathcal{I}}$
  $\top$ repräsentiert also immer die Menge **aller** Elemente, z. B.:

  Mensch $\sqcap\ \exists$hatKind.$\top$
  Menschen, die ein nicht näher spezifiziertes Kind haben

- $\bot^{\mathcal{I}}$ ist für jede Interpretation $\mathcal{I}$ leer.
  Intuitiv repräsentiert $\bot$, dass etwas unmöglich ist, z. B.:

  Mensch $\sqcap\ \forall$hatKind.$\bot$
  Menschen, die keine Kinder haben

T 2.3

Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Folgende Begriffe aus der Aussagenlogik sind auch für $\mathcal{ALC}$ relevant:

Definition 2.3 (erfüllbar, subsumiert, äquivalent)

Seien C und D $\mathcal{ALC}$-Konzepte. Dann

- ist C **erfüllbar**, wenn es Interpretation $\mathcal{I}$ gibt mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$;
  wir nennen $\mathcal{I}$ dann ein *Modell* von C;
- wird C **von D subsumiert**, wenn $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ in allen Interpretationen $\mathcal{I}$ (Notation $\boldsymbol{C \sqsubseteq D}$);
- sind C und D **äquivalent**, wenn $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ in allen Interpretationen $\mathcal{I}$ (Notation $\boldsymbol{C \equiv D}$).

T 2.4

In Aussagenlogik sagt man „D folgt aus C“ statt „D subsumiert C“.

Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Die üblichen aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch in $\mathcal{ALC}$, z. B.:

$\neg(C \sqcap D)$	$\equiv\ \neg C \sqcup \neg D$	de Morgansches Gesetz
$\neg(C \sqcup D)$	$\equiv\ \neg C \sqcap \neg D$	de Morgansches Gesetz
$C \sqcap D$	$\equiv\ D \sqcap C$	Kommutativität von Konjunktion
$C \sqcup D$	$\equiv\ D \sqcup C$	und Disjunktion
$C \sqcap (D \sqcap E)$	$\equiv\ (C \sqcap D) \sqcap E$	Assoziativität von Konjunktion
$C \sqcup (D \sqcup E)$	$\equiv\ (C \sqcup D) \sqcup E$	und Disjunktion
$C \sqcap \top$	$\equiv\ C$	neutrales Element Konjunktion
$C \sqcup \bot$	$\equiv\ C$	neutrales Element Disjunktion

Kapitel 2: Grundlagen

TBoxen

Zur Erinnerung:
TBoxen (terminologische Boxen)

- definieren Konzepte
- setzen diese zueinander in Beziehung

Konzeptdefinition z. B.

$$\text{Student} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}$$

Allgemeines Hintergrundwissen/Constraint z. B.

$$\text{Student} \sqcap \text{Vorlesungssaal} \sqsubseteq \bot$$

TBoxen — Syntax und Semantik

Definition 2.4 (TBox, Syntax)

Konzeptinklusion ist Ausdruck $C \sqsubseteq D$, mit C, D Konzepten.

TBox ist endliche Menge von Konzeptinklusionen.

Wir verwenden $C \equiv D$ als Abkürzung für $C \sqsubseteq D$, $D \sqsubseteq C$.

Konzeptinklusion $C \sqsubseteq D$ wird gelesen als „C impliziert D“. **T 2.5**

Definition 2.5 (TBox, Semantik)

Interpretation $\mathcal{I}$

- **erfüllt** Konzeptinklusion $C \sqsubseteq D$ gdw. $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$;
- ist **Modell** von TBox $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{I}$ alle Konzeptinklusionen in $\mathcal{T}$ erfüllt.

T 2.5 Forts.

TBoxen — Semantik

Beachte: in einer konkreten Interpretation $\mathcal{I}$ werden

- **Konzepte** als **Mengen von Elementen** interpretiert;
- **TBoxen** entweder erfüllt oder nicht erfüllt;
  ihnen wird also ein **Wahrheitswert** zugewiesen.

Intuitiv entspricht jede Interpretation einer **möglichen Welt**.

Manche dieser Welten möchten wir **ausschließen**, weil wir sie aufgrund unseres Wissens nicht für möglich halten.

Genau dazu dienen TBoxen:
jede Konzeptinklusion **„eliminiert“ unerwünschte Interpretationen**.

TBoxen — Modellierung

In der Praxis bestehen TBoxen zu einem **großen Teil** aus

- **Konzeptinklusionen $A \sqsubseteq C$,** wobei A ein Konzept**name** ist

  Intuitiv ist C **notwendige Bedingung** dafür, eine Instanz von A zu sein.

  z. B. in SNOMED:

  $$\text{Perikardium} \sqsubseteq \text{Gewebe} \sqcap \exists \text{teilVon.Herz}$$

- **Konzeptdefinitionen $A \equiv C$,** wobei A ein Konzept**name** ist

  Intuitiv ist C **notwendige und hinreichende Bedingung** dafür, eine Instanz von A zu sein

  z. B. in SNOMED:

  $$\text{Perikarditis} \equiv \text{Entzündung} \sqcap \exists \text{ort.Perikardium}$$

Hinreichende Bedingungen sind für viele Konzepte **schwer** zu finden.

TBoxen — Modellierung

Modellierungsmuster, die **nicht** in dieses Schema passen z. B.:

- **Disjunktheitsconstraints $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$**

  Kein Objekt kann sowohl zu Konzept C als auch zu Konzept D gehören.

  z. B. in SNOMED:

  $$\text{Befund} \sqcap \text{Körperstruktur} \sqsubseteq \bot$$

- **Komplexe Zusammenhänge** zwischen mehreren Konzepten

  z. B.:

  $$\text{Professor} \sqcap \exists \text{hat.Lehrdeputat} \sqsubseteq \exists \text{hält.Vorlesung}$$

Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Wir erweitern unsere grundlegenden Begriffe auf TBoxen:

Definition 2.6 (erfüllbar, subsumiert, äquivalent bezügl. einer TBox)

Seien C, D $\mathcal{ALC}$-Konzepte und $\mathcal{T}$ TBox. Dann

- ist C **erfüllbar bzgl.** $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T}$ Modell $\mathcal{I}$ hat mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$;
- wird C **von D subsumiert bzgl.** $\mathcal{T}$ gdw. $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ in allen Modellen $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}$ (Notation $\mathcal{T} \models \boldsymbol{C \sqsubseteq D}$);
- sind C und D **äquivalent bzgl.** $\mathcal{T}$ gdw. $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ in allen Modellen $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}$ (Notation $\mathcal{T} \models \boldsymbol{C \equiv D}$).

T 2.6

Kleine Übung für Zwischendurch

Aufgabe

1. $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.B \sqcap \exists s.B,\ \ \exists r.B \sqsubseteq \forall r.A\}$

   Ist das Konzept A erfüllbar bzgl. der TBox $\mathcal{T}$?

2. $\mathcal{T} = \{\exists r.\top \sqsubseteq A_1,\ \ \forall r.B \sqsubseteq A_2\}$

   Gilt $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq A_1 \sqcup A_2$?

Hinweise:

- Erfüllbarkeit zeigen: Modell angeben
- Unerfüllbarkeit zeigen: semantisch argumentieren
- Subsumtion zeigen: semantisch argumentieren
- Nicht-Subsumtion zeigen: Gegenmodell angeben

Monotonie

Das Erweitern einer TBox um zusätzliche Konzeptinklusionen wirkt sich wie folgt auf Erfüllbarkeit und Subsumption aus:

Lemma 2.7

Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ TBoxen mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Dann gilt:

1. *Wenn C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_2$, dann ist C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_1$.*
2. *Wenn $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$, dann $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$.*

Die umgekehrten Aussagen sind im Allgemeinen nicht richtig. **T 2.7**

Eine Logik, die diese Eigenschaften erfüllt, nennt man **monoton**.

(Das Hinzunehmen von Formeln kann nur zu *zusätzlichen* Konsequenzen führen, aber nicht dazu, dass Konsequenzen ungültig werden.)

Kapitel 2: Grundlagen

Schlussfolgerungsprobleme

Zur Erinnerung: Schlussfolgern ...

- ist der wichtigste Bestandteil eines intelligenten Systems
- dient dazu, aus explizit gegebenem Wissen neues Wissen abzuleiten, das vorher nur implizit vorhanden war

Wichtigstes Designkriterium für Beschreibungslogiken:

So viel Ausdrucksstärke wie nötig, aber nicht mehr, um möglichst effizientes Schlussfolgern zu erlauben.

Schlussfolgerungsprobleme

Erfüllbarkeitsproblem:

Gegeben C und $\mathcal{T}$, entscheide ob C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$.

Subsumtionsproblem:

Gegeben C, D und $\mathcal{T}$, entscheide ob $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$.

Äquivalenzproblem:

Gegeben C, D und $\mathcal{T}$, entscheide ob $\mathcal{T} \models C \equiv D$.

Diese Entscheidungsprobleme kann man auch mit leerer TBox $\mathcal{T} = \emptyset$ betrachten.

Motivation

Anwendung der Schlussfolgerungsprobleme:

- Modellierungsfehler finden:

  Unerfüllbare Konzepte sind im Allgemeinen **unerwünscht.**

- die Struktur der TBox explizit machen, z. B. für Browsing:

  Subsumtion (= Is-A-Relation) ist Haupt-**Strukturierungsmittel** für TBoxen.

  $C \sqsubseteq D$ kann gelesen werden als „D ist genereller als C“.

- Redundanzen finden:

  Zwei **äquivalente Konzepte** sind **unter Umständen unerwünscht.**

Subsumtion als Ordnungsrelation

Lemma 2.8

Für jede TBox $\mathcal{T}$ ist die Relation „$\sqsubseteq$ bzgl. $\mathcal{T}$“

- *reflexiv* $(\mathcal{T} \models C \sqsubseteq C)$ *und*
- *transitiv* $(\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ *und* $\mathcal{T} \models D \sqsubseteq E$ *impliziert* $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq E)$.

Bis auf fehlende Antisymmetrie ist $\sqsubseteq$ also partielle Ordnung.

Man kann $\sqsubseteq$ als **Hasse-Diagramm** darstellen, dessen Knoten mit Mengen von Konzepten beschriftet sind.

Normalerweise Einschränkung auf die in $\mathcal{T}$ verwendeten Konzept**namen**

T 2.8

Klassifikation

Ein weiteres Schlussfolgerungsproblem:

Klassifikation:

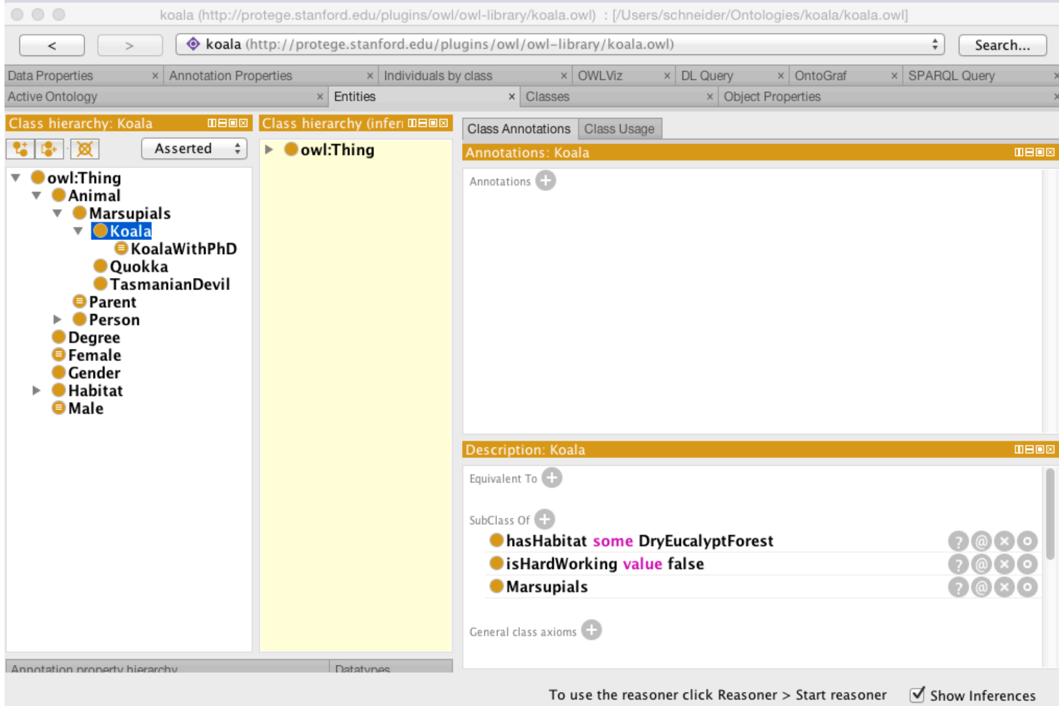
Gegeben $\mathcal{T}$, berechne das Hasse-Diagramm für $\sqsubseteq$ bzgl. $\mathcal{T}$, eingeschränkt auf Konzeptnamen in $\mathcal{T}$.

Ist ein **Berechnungsproblem**, kein Entscheidungsproblem.

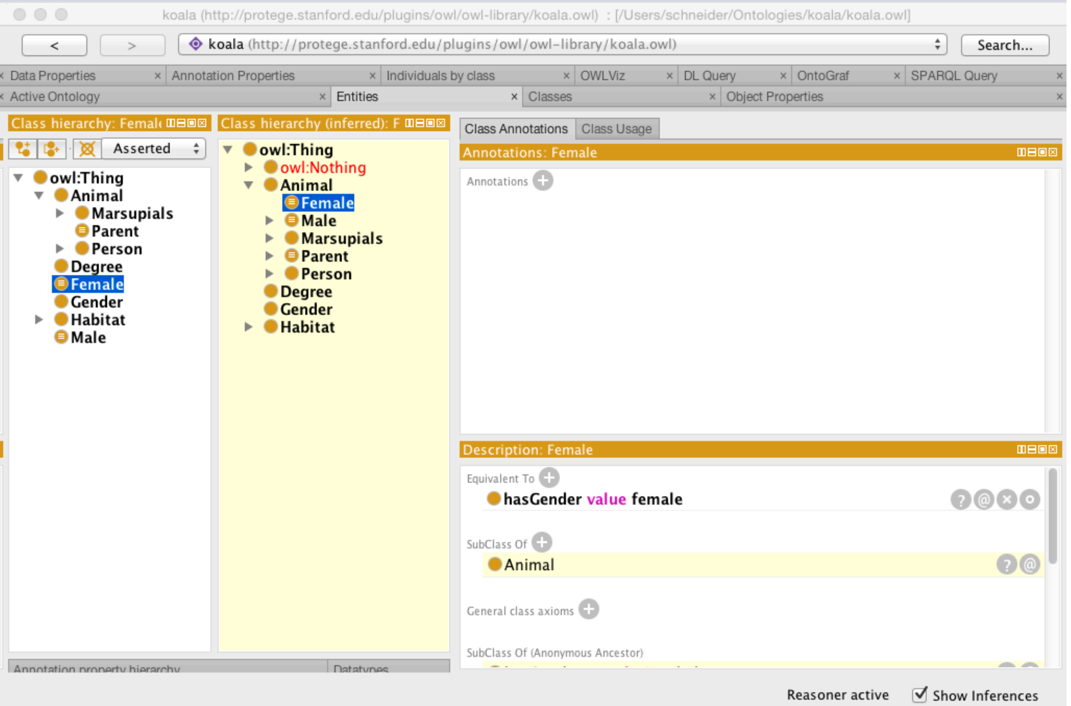
In der Praxis:

- berechenbar durch n^2 Subsumtionsberechnungen (n = Anzahl der Konzeptnamen in $\mathcal{T}$)
- zahlreiche Optimierungen verfügbar

Ontologie-Editor Protégé



Klassifikation in Protégé



Reduktionen

Die 3 Schlussfolgerungsprob. sind wechselseitig polynomiell reduzierbar:

Lemma 2.9

1. *Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:*
   $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ *gdw.* $C \sqcap \neg D$ *unerfüllbar bzgl.* $\mathcal{T}$
2. *Erfüllbarkeit polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:*
   C *erfüllbar bzgl.* $\mathcal{T}$ *gdw.* $\mathcal{T} \not\models C \equiv \bot$
3. *Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:*
   $\mathcal{T} \models C \equiv D$ *gdw.* $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

T 2.9

Algorithmus für eines der Probleme kann also auch für die beiden anderen verwendet werden;
alle drei Probleme haben dieselbe Komplexität (in $\mathcal{ALC}$)

Im Folgenden konzentrieren wir uns meist auf Erfüllbarkeit.

Kapitel 2: Grundlagen

Erweiterungen von $\mathcal{ALC}$

Wir betrachten exemplarisch **zwei Erweiterungen von $\mathcal{ALC}$**:

- **$\mathcal{ALCI}$**: $\mathcal{ALC}$ mit inversen Rollen (Rollenkonstruktor)
- **$\mathcal{ALCQ}$**: $\mathcal{ALC}$ mit Zahlenrestriktionen (Konzeptkonstruktor)

Beide Erweiterungen sind in OWL realisiert.

Namenschema:

- ein Buchstabe pro Erweiterung; üblicherweise steht
  - $\mathcal{I}$ für **i**nverse Rollen
  - $\mathcal{Q}$ für **q**uantifizierte Zahlenrestriktionen
  - $\mathcal{N}$ für unquantifizierte Zahlenrestriktionen (**n**umber restrictions) $\rightsquigarrow$ Spezialfall von $\mathcal{Q}$
  - $\mathcal{F}$ für **F**unktionalität $\rightsquigarrow$ Spezialfall von $\mathcal{N}$

    ⋮
- kann kombiniert werden, z. B. $\mathcal{ALCQI}$

$\mathcal{I}$: Inverse Rollen

Häufig möchte man über Rollen **„in beiden Richtungen“** reden:

- SNOMED: hatTeil / istTeilVon (z. B. in der Anatomie)
- Universitätsbeispiel: hört / wirdGehörtVon ,
  gibt / wirdGegebenVon

Verwendet man diese Rollen einfach als Namen in $\mathcal{ALC}$,
gibt es unintuitive Konsequenzen.

T 2.10

$\mathcal{I}$: Inverse Rollen

Definition 2.10 (Inverse Rollen)

Für jeden Rollennamen r ist r^- die **inverse Rolle** zu r.
Wir definieren:

$$(r^-)^\mathcal{I} = \{(e,d) \mid (d,e) \in r^\mathcal{I}\}$$

$\boldsymbol{\mathcal{ALCI}}$: $\mathcal{ALC}$ erweitert um die Möglichkeit, inverse Rollen in Existenz- und Werterestriktionen zu benutzen.

T 2.10 Forts.

$\mathcal{Q}$: Zahlenrestriktionen

Häufig möchte man Rollennachfolger „zählen“ können:

- SNOMED: Eine Hand ist ein Organ mit **genau 5** Teilen, die ein Finger sind.
- Universitätsbeispiel: in jedem Semester werden **mindestens 2** Wahlpflichtmodule angeboten

Wir werden sehen:
In $\mathcal{ALC}$ ist Zählen nicht ohne Weiteres möglich!

$\mathcal{Q}$: Zahlenrestriktionen

Definition 2.11 (Zahlenrestriktion)

Für jede natürliche Zahl n, jeden Rollennamen r, jedes Konzept C:

- $\leqslant n\, r.C$ (Höchstens-Restriktion)
- $\geqslant n\, r.C$ (Mindestens-Restriktion)

Die Semantik ist:

$$\leqslant n\, r.C^\mathcal{I} = \{d \in \Delta^\mathcal{I} \mid \#\{e \mid (d,e) \in r^\mathcal{I} \wedge e \in C^\mathcal{I}\} \leq n\}$$
$$\geqslant n\, r.C^\mathcal{I} = \{d \in \Delta^\mathcal{I} \mid \#\{e \mid (d,e) \in r^\mathcal{I} \wedge e \in C^\mathcal{I}\} \geq n\}$$

Beachte: **T 2.11**

- $\exists r.C$ ist äquivalent zu $\geqslant 1\, r.C$
- $\forall r.C$ ist äquivalent zu $\leqslant 0\, r.\neg C$

$\boldsymbol{\mathcal{ALCQ}}$: $\mathcal{ALC}$ erweitert um Zahlenrestriktionen

Weitere Erweiterungen

Es gibt noch viel mehr Erweiterungen:

- spezielle Rolleninterpretationen (transitiv, symm., reflexiv etc.)
- Konzepte, die nur eine einzige Instanz haben können $\mathcal{O}$ (Nominale)
- Inklusionen zwischen Rollen oder Rollenketten $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$
- Numerische Werte ($\mathcal{D}$)
- Fixpunktoperatoren
- temporale Operatoren

  ⋮

Viele davon sind in OWL realisiert.

Literatur für dieses Kapitel (Basis)

- F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi und P. F. Patel-Schneider (Hrsg.).
  The Description Logic Handbook.
  2. Auflage, Cambridge University Press, 2007.
  Kapitel 2: Basic Description Logics.
  In SUUB zur Ausleihe und elektronisch verfügbar.
- C. Lutz.
  Theoretische Informatik 1 + 2.
  Vorlesungsskript, Uni Bremen, SoSe 2016.
  Kapitel 15 (v. a. Def. 15.9), 18, 19 (nur Def. 19.1), 20.
  `http://tinyurl.com/ss16-theoinf`
- U. Schöning.
  Theoretische Informatik – kurzgefasst.
  Spektrum Akademischer Verlag, 2008.
  In SUUB mehrfach vorhanden.

Literatur für dieses Kapitel (weiterführend)

- M. Schmidt-Schauß und G. Smolka.
  Attributive concept descriptions with complements.
  Artificial Intelligence, 48(1):1–26, 1991.

Links für dieses Kapitel

- Stanford Center for Biomedical Informatics Research.
  Protégé Ontology Editor.
  `http://protege.stanford.edu/`
- M. Horridge et al.
  Protégé-OWL Tutorial.
  `http://owl.cs.manchester.ac.uk/publications/talks-and-tutorials/protg-owl-tutorial/`
- E. Zolin.
  Description Logic Complexity Navigator.
  `http://www.cs.man.ac.uk/~ezolin/dl/`