Beschreibungslogik

Übungsblatt 3

Abgabe am 18. 5. zu Beginn der Übung

1. (25 %) Für zwei Interpretation $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} \cap \Delta^{\mathcal{I}_2} = \emptyset$ ist die *disjunkte Vereinigung* $\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2$ die wie folgt definierte Interpretation:

$$
\begin{array}{rcll}
\Delta^{\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2} & = & \Delta^{\mathcal{I}_1} \cup \Delta^{\mathcal{I}_2} & \\
A^{\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2} & = & A^{\mathcal{I}_1} \cup A^{\mathcal{I}_2} & \text{für alle Konzeptnamen } A \\
r^{\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2} & = & r^{\mathcal{I}_1} \cup r^{\mathcal{I}_2} & \text{für alle Rollennamen } r
\end{array}
$$

Beweise:

a) Für alle Interpretationen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, Elemente $d \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $\mathcal{ALC}$-Konzepte C gilt: $d \in C^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d \in C^{\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2}$.

b) Wenn $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Modell einer TBox $\mathcal{T}$ sind, dann ist auch $\mathcal{I}_1 \uplus \mathcal{I}_2$ Modell von $\mathcal{T}$.

c) Für jede TBox $\mathcal{T}$ gilt: wenn $\mathcal{T}$ ein endliches Modell mit n Elementen hat, dann auch eines mit m Elementen, für mindestens ein $m > n$.

2. (25 %) Verwende den Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ aus der Vorlesung, um die Erfüllbarkeit der folgenden Konzepte zu entscheiden.

a) $C_0 = \exists r.A \sqcap \exists r.B \sqcap \forall r.\exists r.A \sqcap \forall r.\exists r.\neg A \sqcap \forall r.\forall r.\neg A$

b) $C_0 = \forall r.(A \sqcup B) \sqcap \neg(\forall r.(\neg A \sqcup B) \sqcap \forall r.(A \sqcup \neg B))$

Gib an, welche Regeln in welcher Reihenfolge worauf angewendet werden.

3. (25 %) Im Computerspiel *Multimonster Massacre* bist Du in einem Raum mit einer beliebigen Anzahl[1] von Monstern gefangen. Jedes Monster hat bis zu 100 Köpfe. Du hast eine unbegrenzte Anzahl von Schlägen zur Verfügung. Mit jedem Schlag erlegst Du genau ein Monster, welches dann verschwindet und sofort durch eine beliebige Anzahl[1] neuer Monster ersetzt wird, von denen aber jedes strikt weniger Köpfe hat als das erlegte. Kopflose Monster sind sofort tot.

Zeige mittels einer Multimengenordnung, dass nach endlich vielen Schlägen alle Monster im Raum tot sind.

4. (25 %) Betrachte die folgende Erweiterung des Tableau-Algorithmus aus der Vorlesung (ohne TBoxen) auf die Beschreibungslogik $\mathcal{ALCQ}$:

1. zusätzliche $\geq$-Regel:
   - Wähle $v \in V$ und $(\geq n\, r\, C) \in \mathcal{L}(v)$, so dass es $< n$ Knoten $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v')$.
   - Erweitere V um Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und E um $(v, r, v_1), \ldots, (v, r, v_n)$, und setze $\mathcal{L}(v_i) = \{C\}$ für $1 \leq i \leq n$.

Bitte wenden.

[1] „Beliebige Anzahl“ impliziert immer „endlich viele“ und erlaubt auch „keine“.

2. zusätzliche Art von „offensichtlichem Widerspruch“:
   - Es gibt Knoten $v, v_1, \dots, v_{n+1}$, so dass $(\leq n\, r\, C) \in \mathcal{L}(v)$, $(v, r, v_i) \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v_i)$ für $1 \leq i \leq n+1$.

Zeige, dass der skizzierte Algorithmus auf den folgenden Eingabekonzepten ein falsches Ergebnis liefert:

a) $C_0 = (\geq 2\, r\, (A \sqcap B)) \sqcap (\geq 2\, r\, (A \sqcap B')) \sqcap (\leq 3\, r\, A)$

b) $C_0 = (\geq 3\, r\, A) \sqcap (\leq 1\, r\, B) \sqcap (\leq 1\, r\, \neg B)$

5. Zusatzaufgabe (20 %) Seien $\mathcal{I}_1$ ind $\mathcal{I}_2$ Interpretationen. Ein *Homomorphismus von* $\mathcal{I}_1$ *nach* $\mathcal{I}_2$ ist eine (totale) Funktion $f : \Delta^{\mathcal{I}_1} \to \Delta^{\mathcal{I}_2}$, die für alle $d, e \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ folgende Bedingungen erfüllt.

(i) $d \in A^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $f(d) \in A^{\mathcal{I}_2}$ für alle Konzeptnamen A.

(ii) $(d, e) \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $(f(d), f(e)) \in r^{\mathcal{I}_2}$ für alle Rollennamen r.

Der Homomorphismus f heißt *stark*, wenn die Bedingungen (i) und (ii) auch gelten, wenn „impliziert“ durch „genau dann, wenn“ ersetzt wird. Beweise oder widerlege, dass für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C und alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ gilt:

a) $d \in C^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $f(d) \in C^{\mathcal{I}_2}$, wenn f ein Homomorphismus ist.

b) $d \in C^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $f(d) \in C^{\mathcal{I}_2}$, wenn f ein starker Homomorphismus ist.