Beschreibungslogik

Übungsblatt 2

Abgabe am 4. 5. zu Beginn der Übung

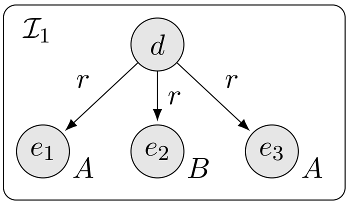
1. (20 %) Beweise die offenen Punkte von Lemma 2.9: Für alle TBoxen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{ALC}$-Konzepte C, D gilt:

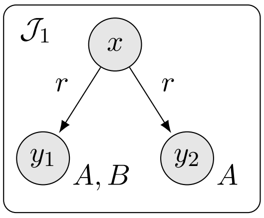
a) C ist erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T} \not\models C \equiv \bot$

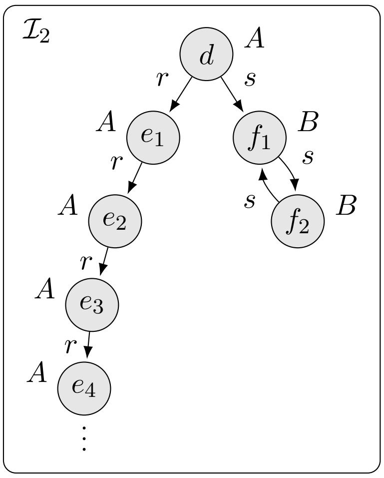
b) $\mathcal{T} \models C \equiv D$ gdw. $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

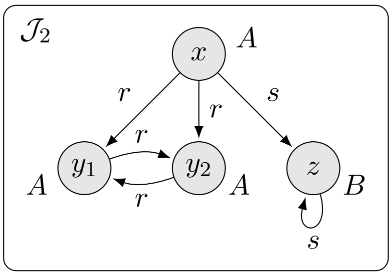
Use the definitions, Luke! ☺

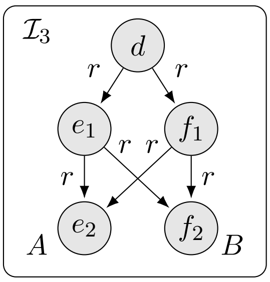
2. (20 %) Für jedes der folgenden Interpretationspaare $\mathcal{I}_i, \mathcal{J}_i$ bestimme, ob es ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt mit $d \in C^{\mathcal{I}_i}$ und $x \notin C^{\mathcal{J}_i}$ oder umgekehrt. Wenn dies der Fall ist, gib das Konzept C explizit an. Wenn nicht, gib eine Bisimulation an, die zeigt, dass $(\mathcal{I}_i, d) \sim (\mathcal{J}_i, x)$.

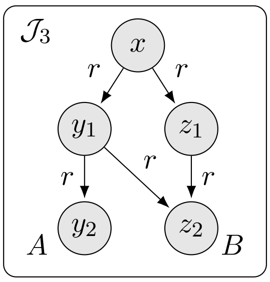












Bitte wenden.

3. (20 %) Beweise, dass die folgenden Eigenschaften nicht in $\mathcal{ALC}$ ausdrückbar sind, wobei r und s feste Rollennamen sind. Benutze dazu Theorem 3.5.

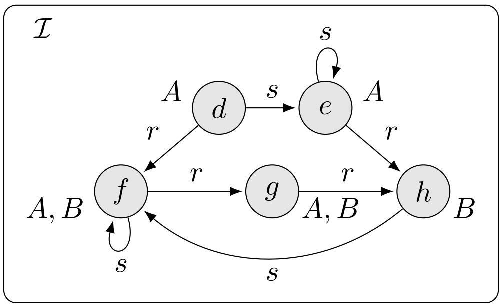
   a) $\{ (\mathcal{I}, d) \mid \text{für alle } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ gilt: } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \}$

   b) $\{ (\mathcal{I}, d) \mid \text{es gibt ein } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } (d, e) \in s^{\mathcal{I}} \}$

   c) $\{ (\mathcal{I}, d) \mid \text{es gibt ein } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } (e, d) \in s^{\mathcal{I}} \}$

4. (20 %) Konstruiere die Unravellings der umseitig dargestellten Interpretationen $\mathcal{I}_3$ und $\mathcal{J}_2$ an den Stellen x bzw. d gemäß Definition 3.7. Eine graphische Darstellung der Unravellings ist ausreichend.

5. (20 %) Seien $C = A$ und $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.B,\ \forall r.B \sqsubseteq A \sqcup B,\ A \sqcap \neg B \sqsubseteq \exists s.(A \sqcap \neg B)\}$. Konstruiere die Filtration des folgenden Modells $\mathcal{I}$ bzgl. C und $\mathcal{T}$ gemäß Definition 3.16. Gib $\mathsf{sub}(C, \mathcal{T})$ und $t_{\mathcal{I}}(x)$ für alle Elemente x an und stelle die Filtration graphisch dar.



6. **Zusatzaufgabe** (20 %) Betrachte den folgenden Versuch, eine für $\mathcal{ALCQ}$ geeignete Bisimulationsrelation zu definieren:

> Eine Relation ρ heißt $\mathcal{ALCQ}$-*Bisimulation* zwischen zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$, wenn Bedingungen 1–3 aus Definition 3.1 erfüllt sind und zusätzlich gilt:
>
> 4. Wenn $d_1 \,\rho\, d_2$ und $(d_1, d_1'), (d_1, d_1'') \in r^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \neq d_1''$ für einen Rollennamen r, dann gibt es $d_2', d_2'' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \,\rho\, d_2'$ und $d_1'' \,\rho\, d_2''$ sowie $(d_2, d_2'), (d_2, d_2'') \in r^{\mathcal{I}_2}$.

   a) Zeige, dass diese Definition nicht ausreicht, um die in Theorem 3.2 behauptete Eigenschaft für alle $\mathcal{ALCQ}$-Konzepte sicherzustellen. Gib dafür ein $\mathcal{ALCQ}$-Konzept C sowie zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ und Elemente d_1, d_2 an mit $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$, aber $d_2 \notin C^{\mathcal{I}_2}$.

   b) Wie muss man Bedingung 4 modifizieren, damit die Behauptung aus Theorem 3.2 für alle $\mathcal{ALCQ}$-Konzepte gilt? Gib die modifizierte Bedingung an.

   c) Zeige nun, dass mit Deiner modifizierten Bedingung 4 Theorem 3.2 für $\mathcal{ALCQ}$ gilt. Formuliere dazu nur den im Induktionsschritt zusätzlich benötigten Fall für Konzepte der Form $(\geqslant n\ r\ C)$ aus. Warum ist kein zusätzlicher Fall für $(\leqslant n\ r\ C)$ notwendig?