

# Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
-  Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau-Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken
- Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung

## Grundlagen

Die Beschreibungslogik *ALC*

Es gibt viele verschiedene Beschreibungslogiken:

- viele mögliche Kompromisse bzgl. Ausdrucksstärke vs. Komplexität des Schlussfolgerns
- verschiedene Anwendungen haben unterschiedliche Anforderungen

Hier zunächst *ALC*:

- die einfachste BL mit allen Booleschen Konstruktoren
- eingeführt 1991 von Schmidt-Schauß und Smolka
- steht für *Attributive (Concept) Language with Complement*

# ALC

Wir fixieren von nun an

- eine abzählbar unendliche Menge von Konzeptnamen  
Diese bezeichnen Klassen / unäre Prädikate  
z.B. Person, Kurs, Universität, Tafel, Student, etc.
- eine abzählbar unendliche Menge von Rollennamen  
Diese bezeichnen Relationen / binäre Prädikate  
z.B. hört, lehrt, istTeilVon, etc.

Wir nehmen die beiden Mengen als disjunkt an und unterscheiden Konzept- und Rollennamen über Groß- / Kleinschreibung.

Konzepte dienen der Beschreibung einer Klasse von Objekten, sind zusammengesetzt aus

- Konzeptnamen
- Rollennamen
- Konzeptkonstruktoren
- (manchmal auch Rollenkonstruktoren)

Es gibt viele verschiedene Konstruktoren

Verschiedene Konstruktormengen ergeben verschiedene Beschreibungslogiken

# ALC: Syntax

Definition 2.1 (*ALC*-Konzepte).

Die Menge der *ALC*-Konzepte ist induktiv definiert:

- Jeder Konzeptname ist *ALC*-Konzept
- Wenn  $C, D$  *ALC*-Konzepte, so auch
  - $\neg C$  (Negation)
  - $C \sqcap D$  (Konjunktion)
  - $C \sqcup D$  (Disjunktion)
- Wenn  $C$  *ALC*-Konzept und  $r$  Rollenname, so sind
  - $\exists r.C$  (Existenzrestriktion)
  - $\forall r.C$  (Werterestriktion)

*ALC*-Konzepte.

T2.1

# ALC: Syntax

Verwendete Symbole:

- $A, B$  für Konzeptnamen
- $C, D$  für zusammengesetzte Konzepte
- $r, s$  für Rollennamen

Zwei nützliche Abkürzungen: wir schreiben

- $\top$  für  $A \sqcup \neg A$  (Top-Konzept)
- $\perp$  für  $A \sqcap \neg A$  (Bottom-Konzept)

wobei  $A$  ein beliebiger Konzeptname ist.

# ALC: Syntax

Präzedenzregel:

- $\neg$ ,  $\exists$ ,  $\forall$  binden stärker als  $\sqcap$  und  $\sqcup$

Also zum Beispiel:

$\forall r. (\exists r. A \sqcap B)$  steht für  $\forall r. ((\exists r. A) \sqcap B)$

und nicht für  $\forall r. (\exists r. (A \sqcap B))$

Keine Präzedenz zwischen  $\sqcap$  und  $\sqcup$ : Klammern verwenden!

# ALC: Semantik

**Definition 2.2** (*ALC* Semantik).

Eine *Interpretation*  $\mathcal{I}$  ist Paar  $(\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  mit

- $\Delta^{\mathcal{I}}$  nicht-leere Menge (*Domäne*)
- $\cdot^{\mathcal{I}}$  *Interpretationsfunktion* bildet ab:
  - jeden Konzeptnamen  $A$  auf Menge  $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
  - jeden Rollennamen  $r$  auf Relation  $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

T2.2

Abbildung  $\cdot^{\mathcal{I}}$  wird induktiv auf zusammengesetzte Konzepte erweitert:

- $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}},$
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}, \quad (C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}},$
- $(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \text{es gibt } e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ und } e \in C^{\mathcal{I}}\},$
- $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \text{für alle } e \in \Delta^{\mathcal{I}}, (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ impliziert } e \in C^{\mathcal{I}}\}$

T2.2 cont.

# ALC: Semantik

Verwendete Symbole:

- $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  für Interpretationen
- $d, e$  für Elemente der Domäne

Für Interpretationen verwenden wir übliche Terminologie für Graphen:

- $e$  ist  $r$ -Nachfolger von  $d$  (in  $\mathcal{I}$ ) wenn  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ ;
- $e$  ist  $r$ -Vorgänger von  $d$  (in  $\mathcal{I}$ ) wenn  $(e, d) \in r^{\mathcal{I}}$ ;
- wenn  $r$  unwichtig, sprechen wir nur von *Nachfolgern* / *Vorgängern*;
- $\mathcal{I}$  ist endlich gdw.  $\Delta^{\mathcal{I}}$  endlich ist.

# Extension/ Modell

Wir nennen

- $C^{\mathcal{I}}$  die *Extension* des Konzeptes  $C$ ;
- jedes  $d \in C^{\mathcal{I}}$  eine *Instanz* des Konzeptes  $C$ ;
- $r^{\mathcal{I}}$  die *Extension* der Rolle  $r$ .

Beachte:

- $\top^{\mathcal{I}}$  ist für jede Interpretation  $\mathcal{I}$  identisch mit  $\Delta^{\mathcal{I}}$   
 $\top$  repräsentiert also immer die Menge *aller* Elemente

Mensch  $\sqcap$   $\exists$ hatKind. $\top$

Menschen, die ein nicht näher  
spezifiziertes Kind haben

- $\perp^{\mathcal{I}}$  ist für jede Interpretation  $\mathcal{I}$  leer

Intuitiv repräsentiert  $\perp$ , dass etwas unmöglich ist, z.B.:

Mensch  $\sqcap$   $\forall$ hatKind. $\perp$

Menschen, die keine Kinder haben

T2.3

# Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Folgende Begriffe aus der Aussagenlogik spielen auch für  $\mathcal{ALC}$  eine Rolle:

**Definition 2.3** (Erfüllbar, subsumiert, äquivalent)

Seien  $C$  und  $D$   $\mathcal{ALC}$ -Konzepte. Dann

- ist  $C$  *erfüllbar* wenn es Interpretation  $\mathcal{I}$  gibt mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$   
wir nennen  $\mathcal{I}$  dann ein *Modell* von  $C$ ;
- wird  $C$  *von*  $D$  *subsumiert* wenn  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$  in allen Interpretationen  $\mathcal{I}$  (Notation  $C \sqsubseteq D$ )
- sind  $C$  und  $D$  *äquivalent* wenn  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$  in allen Interpretationen  $\mathcal{I}$  (Notation  $C \equiv D$ ).

T2.4

In der Aussagenlogik sagt man “ $D$  folgt aus  $C$ ” statt “ $D$  subsumiert  $C$ ”

# Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Die üblichen aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch in  $\mathcal{ALC}$ , z.B.:

$$\neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D$$

de Morgansches Gesetz

$$\neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D$$

de Morgansches Gesetz

$$C \sqcap D \equiv D \sqcap C$$

Kommutativität von Konjunktion

$$C \sqcup D \equiv D \sqcup C$$

und Disjunktion

$$C \sqcap (D \sqcap E) \equiv (C \sqcap D) \sqcap E$$

Assoziativität von Konjunktion

$$C \sqcup (D \sqcup E) \equiv (C \sqcup D) \sqcup E$$

und Disjunktion

$$C \sqcap \top \equiv C$$

Neutrales Element Konjunktion

$$C \sqcup \perp \equiv C$$

Neutrales Element Disjunktion

## Grundlagen

TBoxen

# TBoxen

Zur Erinnerung:

TBoxen (terminologische Boxen)

- definieren Konzepte
- setzen diese zueinander in Beziehung

Konzeptdefinition z.B.

$$\text{Student} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}$$

Allgemeines Hintergrundwissen / Constraint z.B.

$$\text{Student} \sqcap \text{Vorlesungssaal} \sqsubseteq \perp$$

# TBoxen - Syntax und Semantik

## Definition 2.4 (TBox—Syntax)

*Konzeptinklusion* ist Ausdruck  $C \sqsubseteq D$ , mit  $C, D$  Konzepten.

*TBox* ist endliche Menge von Konzeptinklusionen.

Wir verwenden  $C \equiv D$  als Abkürzung für  $C \sqsubseteq D, D \sqsubseteq C$ .

T2.6

Konzeptinklusion  $C \sqsubseteq D$  wird gelesen als „ $C$  impliziert  $D$ “.

## Definition 2.5 (TBox—Semantik)

Interpretation  $\mathcal{I}$

- *erfüllt* Konzeptinklusion  $C \sqsubseteq D$  gdw.  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ ;
- ist *Modell* von TBox  $\mathcal{T}$  gdw.  $\mathcal{I}$  alle Konzeptinklusionen in  $\mathcal{T}$  erfüllt.

Beachte:  $\mathcal{I}$  erfüllt  $C \equiv D$  gdw.  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$

T2.6 cont

# TBoxen - Semantik

Beachte: in einer konkreten Interpretation  $\mathcal{I}$  werden

- *Konzepte* als *Mengen von Elementen* interpretiert
- *TBoxen* entweder erfüllt oder nicht erfüllt, ihnen wird also ein *Wahrheitswert* zugewiesen.

Intuitiv entspricht jede Interpretation einer *möglichen Welt*.

Manche dieser Welten möchten wir *ausschließen*, weil wir sie aufgrund unseres Wissens nicht für möglich halten.

Genau dazu dienen TBoxen:

jede Konzeptinklusion „*eliminiert*“ *unerwünschte Interpretationen*.

# TBoxen – Modellierung

In der Praxis bestehen TBoxen zu einem großen Teil aus

- Konzeptinklusionen  $A \sqsubseteq C$ , wobei  $A$  ein Konzeptname ist

Intuitiv ist  $C$  *notwendige Bedingung* dafür, eine Instanz von  $A$  zu sein

Zum Beispiel in SNOMED:

$$\text{Perikardium} \sqsubseteq \text{Gewebe} \sqcap \exists \text{teilVon.Herz}$$

- Konzeptdefinitionen  $A \equiv C$ , wobei  $A$  ein Konzeptname ist

Intuitiv ist  $C$  *notwendige und hinreichende Bedingung* dafür, eine Instanz von  $A$  zu sein

Zum Beispiel in SNOMED:

$$\text{Perikarditis} \equiv \text{Entzündung} \sqcap \exists \text{ort.Perikardium}$$

Hinreichende Bedingungen lassen sich für viele Konzepte nicht leicht finden.

# TBoxen – Modellierung

Modellierungsmuster, die nicht in dieses Schema passen z.B.:

- Disjunktheitsconstraints  $C \sqcap D \sqsubseteq \perp$

Kein Objekt kann sowohl zu Konzept  $C$  als auch zu Konzept  $D$  gehören

Zum Beispiel in SNOMED:

$$\text{Befund} \sqcap \text{Körperstruktur} \sqsubseteq \perp$$

- Komplexe Zusammenhänge zwischen mehreren Konzepten

Zum Beispiel:

$$\text{Professor} \sqcap \exists \text{hat.Lehrdeputat} \sqsubseteq \exists \text{hält.Vorlesung}$$

# Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz

Wir erweitern unsere grundlegenden Begriffe auf TBoxen:

**Definition 2.6** (Erfüllbar, subsumiert, äquivalent bezüglich einer TBox)

Seien  $C, D$   $\mathcal{ALC}$ -Konzepte und  $\mathcal{T}$  TBox. Dann

- ist  $C$  *erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$*  gdw.  $\mathcal{T}$  Modell  $\mathcal{I}$  hat mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- wird  $C$  *von  $D$  subsumiert bzgl.  $\mathcal{T}$*  gdw  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$  in allen Modellen  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}$  (Notation  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ )
- sind  $C$  und  $D$  *äquivalent bzgl.  $\mathcal{T}$*  gdw  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$  in allen Modellen  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}$  (Notation  $\mathcal{T} \models C \equiv D$ ).

T2.7

# Kleine Übung für Zwischendurch

## Aufgabe 1

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} A \sqsubseteq \exists r.B \sqcap \exists s.B, \\ \exists r.B \sqsubseteq \forall r.A \end{array} \right\}$$

Ist das Konzept  $A$  erfüllbar  
bzgl. der TBox  $\mathcal{T}$ ?

## Aufgabe 2

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \exists r.T \sqsubseteq A_1, \\ \forall r.B \sqsubseteq A_2 \end{array} \right\}$$

Gilt  $\mathcal{T} \models T \sqsubseteq A_1 \sqcup A_2$ ?

Erfüllbarkeit zeigen: Modell angeben.

Unerfüllbarkeit zeigen: semantisch argumentieren.

Subsumtion zeigen: semantisch argumentieren.

Nicht-Subsumtion zeigen: Gegenmodell angeben.

# Monotonie

Das Erweitern einer TBox um zusätzliche Konzeptinklusionen wirkt sich wie folgt auf Erfüllbarkeit und Subsumption aus:

**Lemma 2.7** Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  TBoxen mit  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Dann gilt:

1. Wenn  $C$  erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}_2$ , dann ist  $C$  erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}_1$ ;
2. Wenn  $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$ , dann  $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$ .

Die umgekehrten Aussagen sind im Allgemeinen nicht richtig. **T2.8**

Eine Logik, die diese Eigenschaften erfüllt, nennt man *monoton* (das Hinzunehmen von Formeln kann nur zu *zusätzlichen* Konsequenzen, führen, aber nicht dazu, dass Konsequenzen ungültig werden)

## Grundlagen

Schlussfolgerungsprobleme

# Schlussfolgerungsprobleme

Zur Erinnerung: Schlussfolgern ...

- ist der wichtigste Bestandteil eines intelligenten Systems
- dient dazu, aus explizit gegebenem Wissen neues Wissen abzuleiten, das vorher nur implizit vorhanden war

Wichtigstes Designkriterium für Beschreibungslogiken:

So viel Ausdrucksstärke wie nötig, aber nicht mehr, um möglichst effizientes Schlussfolgern zu erlauben.

# Schlussfolgerungsprobleme

Erfüllbarkeitsproblem:

gegeben  $C$  und  $\mathcal{T}$ , entscheide ob  $C$  erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$ ;

Subsumtionsproblem:

gegeben  $C, D$  und  $\mathcal{T}$ , entscheide ob  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ ;

Äquivalenzproblem:

gegeben  $C, D$  und  $\mathcal{T}$ , entscheide ob  $\mathcal{T} \models C \equiv D$ ;

Diese Entscheidungsprobleme kann man auch mit leerer TBox  $\mathcal{T} = \emptyset$  betrachten.

# Motivation

Anwendung:

- Modellierungsfehler finden:  
unerfüllbare Konzepte sind im Allgemeinen unerwünscht;
- die Struktur der TBox explizit machen, z. B. für Browsing:  
Subsumtion (= Is-A-Relation) ist Haupt-Strukturierungsmittel für TBoxen  
 $C \sqsubseteq D$  kann gelesen werden als „ $D$  ist genereller als  $C$ “
- Redundanzen finden:  
zwei äquivalente Konzepte sind u. U. unerwünscht.

# Subsumtion als Ordnungsrelation

## Lemma 2.8

Für jede TBox  $\mathcal{T}$  ist die Relation „ $\sqsubseteq$  bzgl.  $\mathcal{T}$ “

- reflexiv ( $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq C$ ) und
- transitiv ( $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  und  $\mathcal{T} \models D \sqsubseteq E$  impliziert  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq E$ ).

Bis auf fehlende Antisymmetrie ist  $\sqsubseteq$  also partielle Ordnung.

Man kann  $\sqsubseteq$  als Hasse-Diagramm darstellen, dessen Knoten mit Mengen von Konzepten beschriftet sind.

Normalerweise Einschränkung auf die in  $\mathcal{T}$  verwendeten Konzeptnamen

T2.9

# Klassifikation

Ein weiteres Schlussfolgerungsproblem:

- *Klassifikation*: gegeben  $\mathcal{T}$ , berechne das Hasse-Diagramm für  $\sqsubseteq$  bzgl.  $\mathcal{T}$ , eingeschränkt auf Konzeptnamen in  $\mathcal{T}$ .

Berechnungsproblem, kein Entscheidungsproblem.

In der Praxis:

- berechenbar durch  $n^2$  Subsumtionsberechnungen;
- zahlreiche Optimierungen verfügbar.

# Ontologie-Editor Protégé

koala (http://protege.stanford.edu/plugins/owl/owl-library/koala.owl) : [/Users/schneider/Ontologies/koala/koala.owl]

koala (http://protege.stanford.edu/plugins/owl/owl-library/koala.owl) Search...

Data Properties x Annotation Properties x Individuals by class x OWLViz x DL Query x OntoGraf x SPARQL Query x

Active Ontology x Entities x Classes x Object Properties x

Class hierarchy: Koala Class hierarchy (inferred)

Asserted

- owl:Thing
  - Animal
    - Marsupials
      - Koala**
        - KoalaWithPhD
        - Quokka
        - TasmanianDevil
      - Parent
    - Person
    - Degree
    - Female
    - Gender
    - Habitat
    - Male

Class Annotations Class Usage

Annotations: Koala

Annotations +

Description: Koala

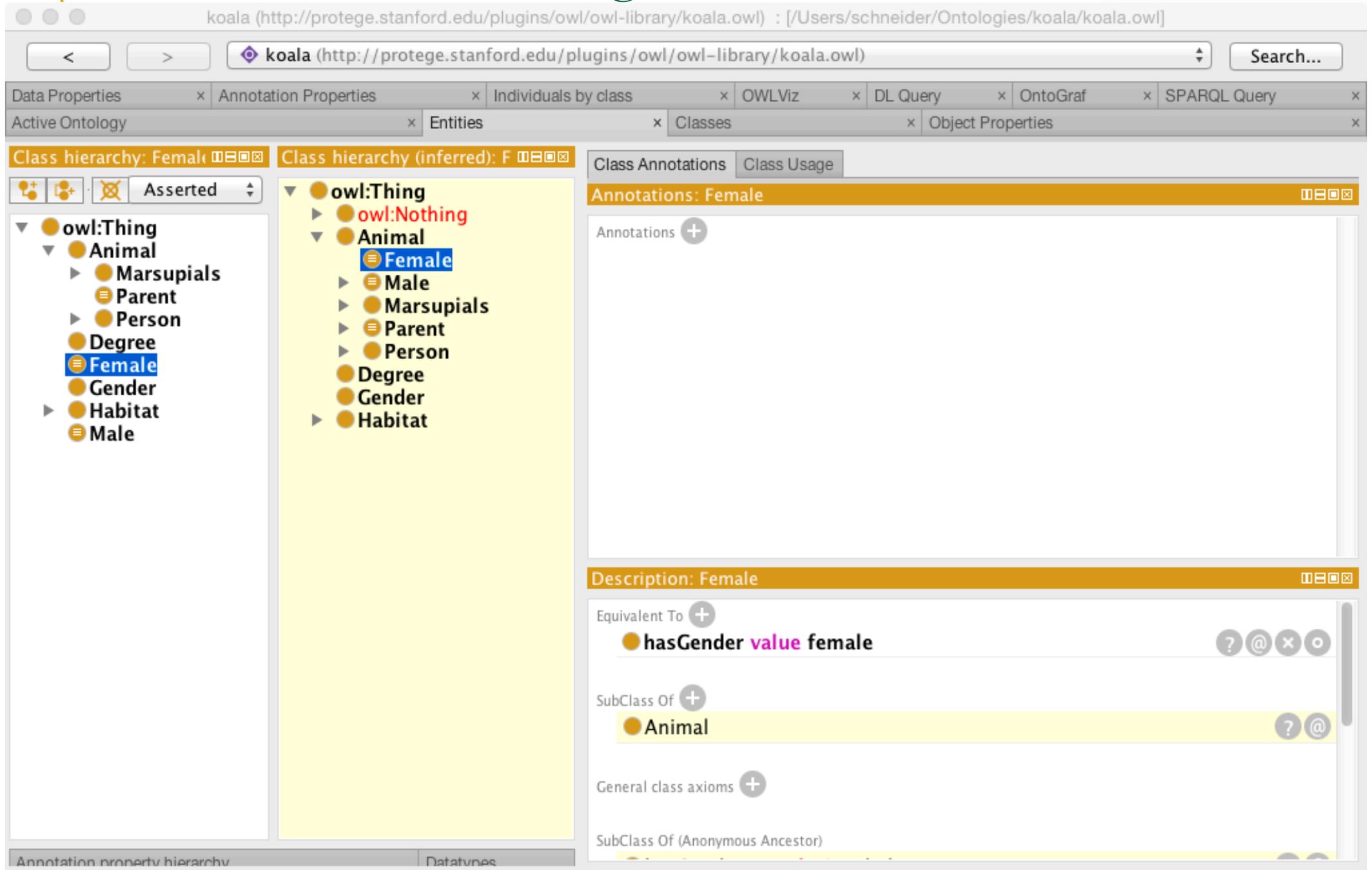
Equivalent To +

SubClass Of +

- hasHabitat **some** DryEucalyptForest
- isHardWorking **value** false
- Marsupials

General class axioms +

# Klassifikation in Protégé



The screenshot shows the Protégé interface with the following components:

- Browser:** koala (http://protege.stanford.edu/plugins/owl/owl-library/koala.owl) : [/Users/schneider/Ontologies/koala/koala.owl]
- Navigation:** < > koala (http://protege.stanford.edu/plugins/owl/owl-library/koala.owl) Search...
- Tabbed Interface:** Data Properties, Annotation Properties, Individuals by class, OWLViz, DL Query, OntoGraf, SPARQL Query, Active Ontology, Entities, Classes, Object Properties.
- Class Hierarchy (Left):** Asserted view showing owl:Thing, Animal, Marsupials, Parent, Person, Degree, Female, Gender, Habitat, Male.
- Class Hierarchy (Center):** Inferred view showing owl:Thing, owl:Nothing, Animal, Female, Male, Marsupials, Parent, Person, Degree, Gender, Habitat.
- Class Annotations (Right):** Annotations: Female (empty list).
- Description (Right):** Description: Female
  - Equivalent To: hasGender value female
  - SubClass Of: Animal
  - General class axioms
  - SubClass Of (Anonymous Ancestor)

# Reduktionen

Erfüllbarkeit, Subsumtion, Äquivalenz wechselseitig polynomiell reduzierbar:

**Lemma 2.9.**

1. Subsumtion polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D \quad \text{gdw.} \quad C \cap \neg D \text{ unerfüllbar bzgl. } \mathcal{T}$$

2. Erfüllbarkeit polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:

$$C \text{ erfüllbar bzgl. } \mathcal{T} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$$

3. Äquivalenz polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:

$$\mathcal{T} \models C \equiv D \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \cap D) \sqcup (\neg C \cap \neg D) \quad \text{T2.10}$$

Algorithmus für eines der Probleme kann also auch für die beiden anderen verwendet werden; alle drei Probleme haben dieselbe Komplexität (in  $\mathcal{ALC}$ )

Im Folgenden konzentrieren wir uns meist auf Erfüllbarkeit

## Grundlagen

Erweiterungen von *ACC*

# Erweiterungen von *ALC*

Wir betrachten exemplarisch zwei Erweiterungen von *ALC*:

- *ALCI*: *ALC* mit inversen Rollen (Rollenkonstruktor)
- *ALCQ*: *ALC* mit Zahlenrestriktionen (Konzeptkonstruktor)

Beide Erweiterungen sind in OWL realisiert.

Namenschema:

- ein Buchstabe pro Erweiterung
- kann kombiniert werden, z.B. *ALCQI*

# Inverse Rollen

Häufig möchte man über Rollen „in beiden Richtungen“ reden:

- SNOMED: hatTeil / istTeilVon (z.B. in der Anatomie)
- Universitätsbeispiel: hört / wirdGehörtVon ,  
gibt / wirdGegebenVon

Verwendet man diese Rollen einfach als Namen in *ACC*,  
gibt es unintuitive Konsequenzen.

T2.11

# Inverse Rollen

**Definition 2.10.** (Inverse Rollen)

Für jeden Rollennamen  $r$  ist  $r^-$  die *inverse Rolle* zu  $r$ . Wir definieren

$$(r^-)^{\mathcal{I}} = \{(e, d) \mid (d, e) \in r^{\mathcal{I}}\}.$$

***ALCI***: ***ALC*** erweitert um die Möglichkeit, inverse Rollen in Existenz- und Werterestriktionen zu benutzen.

T2.11 cont.

# Zahlenrestriktionen

Häufig möchte man Rollennachfolger „zählen“ können:

- SNOMED: Eine Hand ist ein Organ mit fünf Teilen, die ein Finger sind.
- Universitätsbeispiel: in jedem Semester werden mindestens 2  
Wahlpflichtmodule angeboten

Wir werden sehen:

In *ALC* ist Zählen nicht ohne weiteres möglich

# Zahlenrestriktionen

**Definition 2.11.** (Zahlenrestriktion)

Für jede natürliche Zahl  $n$ , jeden Rollennamen  $r$  und jedes Konzept  $C$ :

- $(\leq n r C)$  (Höchstens-Restriktion);
- $(\geq n r C)$  (Mindestens-Restriktion);

Die Semantik ist

- $(\leq n r C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{e \mid (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \wedge e \in C^{\mathcal{I}}\} \leq n\}$
- $(\geq n r C)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{e \mid (d, e) \in r^{\mathcal{I}} \wedge e \in C^{\mathcal{I}}\} \geq n\}$

Beachte:

- $\exists r.C$  ist äquivalent zu  $(\geq 1 r C)$
- $\forall r.C$  ist äquivalent zu  $(\leq 0 r \neg C)$

T2.12

**ALCQ:** *ALC* erweitert mit Zahlenrestriktionen.

# Weitere Erweiterungen

Es gibt noch viel mehr Erweiterungen:

- Spezielle Rolleninterpretationen (transitiv, symmetrisch, reflexiv etc.)
- Konzepte, die nur eine einzige Instanz haben können (Nominale)
- Inklusionen zwischen Rollen oder Rollenketten
- Numerische Werte
- Fixpunktoperatoren
- temporale Operatoren
- ...

Viele davon sind in OWL realisiert.