Prof. Carsten Lutz/Dr. Jean Christoph Jung Sommersemester 2015

Theoretische Informatik 2

Blatt 9 (Ungewertete Aufgaben)

Besprechung: KW 25

---

1. Ein Semi-Thue-System ist eine Menge $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ von Paaren von Wörtern über einem endlichen Alphabet Σ. Ein Semi-Thue-System P definiert eine (Ableitungs-)Relation $\Rightarrow_P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ wie folgt:

$$x \Rightarrow_P y \quad \text{gdw.} \quad x = x_1 u x_2,\ y = x_1 v x_2, \text{ und } (u,v) \in P.$$

Desweiteren schreiben wir $x \Rightarrow_P^* y$, falls es eine endliche Folge $w_0, \ldots, w_n$ gibt mit $x = w_0$, $y = w_n$ und $w_0 \Rightarrow_P w_1 \Rightarrow_P \ldots \Rightarrow_P w_n$.

Zeigen Sie, dass folgendes Problem unentscheidbar ist.

Gegeben ein Semi-Thue-System P und zwei Wörter x, y, entscheide ob $x \Rightarrow_P^* y$.

2. Welche der folgenden Sprachen ist semi-entscheidbar und welche nicht? Begründen Sie.

a) $\{\mathsf{code}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A}$ hält auf mindestens einer Eingabe$\}$;

b) $\{\mathsf{code}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A}$ hält auf mindestens einer Eingabe nicht$\}$.

3. Sei Σ ein endliches Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Eine binäre Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls die Menge $\{x\#y \mid (x,y) \in R\}$ entscheidbar ist.

a) Zeigen Sie, dass $L \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar ist genau dann, wenn es eine entscheidbare Relation R gibt mit $L = \{x \in \Sigma^* \mid$ es existiert ein y mit $R(x,y)\}$.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass die folgende Sprache PKP rekursiv aufzählbar ist.

$$\mathsf{PKP} = \{x_1\$y_1\$\ldots\$x_n\$y_n \in \{0,1,\$\}^* \mid x_i, y_i \in \{0,1\}^* \text{ und das PKP } (x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n) \text{ hat eine Lösung}\}$$

4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L in aufsteigender Ordnung rekursiv aufgezählt werden kann.

b) Jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge hat eine unendliche entscheidbare Teilmenge.

Hinweis: Für $w, v \in \Sigma^*$ gilt $w < v$ genau dann, wenn *(i)* $|w| < |v|$ oder *(ii)* $|w| = |v|$ und $w = a_1 \ldots a_n$, $v = b_1 \ldots b_n$ und es gibt ein i sodass $a_i < b_i$ und $a_j = b_j$ für alle $j < i$.