AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

4. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Beschreibungslogik“

Aufgabe 1: 20%

Verwende den Tableau Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen aus der Vorlesung, um Erfüllbarkeit der folgenden Konzepte C_0 bzgl. TBoxen $\mathcal{T}$ zu entscheiden:

(a) $C_0 = A$, $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.\exists r.A \sqcap \forall r.A' \sqcap (\neg A \sqcup \neg A')\}$;

(b) $C_0 = A \sqcap B' \sqcap \forall r.(B \sqcap \forall r.B')$, $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists s.A\}$.

Im Falle von Erfüllbarkeit gib das Modell aus dem Beweis von Proposition 4.15 an.

Aufgabe 2: 20%

Vervollständige den Beweis von Proposition 4.11 aus der Vorlesung durch Erweiterung auf die Fälle der $\sqcap$-Regel und der $\forall$-Regel. Orientiere Dich dabei an den in der Vorlesung behandelten Fällen.

Aufgabe 3: 20%

Du hast einen vollen Semesterplan und es gibt viel zu erledigen. Alle Aufgaben sind in Deinem Organizer gespeichert, zusammen mit einer (ganzzahligen) Priorität zwischen 1 (niedrig) und 100 (hoch). Du arbeitest an einer Aufgabe nach der anderen. Während Du eine Aufgabe bearbeitest kann es sein, dass eine Reihe von Teilaufgaben zu bearbeiten sind. In diesem Fall löschst Du die momentane Aufgabe aus dem Organizer und ersetzt sie durch die Teilaufgaben. Jede davon hat strikt kleinere Priorität als die ursprüngliche Aufgabe.

Verwende eine Multimengenordnung, um zu beweisen, dass Du schlussendlich alle Aufgaben erledigen wirst.

Aufgabe 4: 20%

Verwende den Tableau Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen aus der Vorlesung, um die folgende Subsumtion zu entscheiden:

$$\mathcal{T} \models \neg\forall r.\neg A \sqsubseteq \neg\forall r.\neg\exists r.\neg B \quad \text{wobei} \quad \mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \forall r.\forall r.A,\ \neg B \sqsubseteq \exists r.\top,\ A \equiv \neg B\}.$$

Aufgabe 5: 20%

Betrachte die folgende Erweiterung des Tableau-Algorithmus aus der Vorlesung (ohne TBoxen) auf die Beschreibungslogik $\mathcal{ALCQ}$:

1. zusätzliche $\geq$-Regel:
   - wähle $v \in V$ und $(\geq n\, r\, C) \in \mathcal{L}(v)$, so dass es $< n$ Knoten $v' \in V$ gibt mit $(v, r, v') \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v')$;
   - erweitere V um Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und E um $(v, r, v_1), \ldots, (v, r, v_n)$, setze $\mathcal{L}(v_i) = \{C\}$ für $1 \leq i \leq n$.
2. zusätzliche Art von „offensichtlichem Widerspruch“:
   - es gibt Knoten $v, v_1, \ldots, v_{n+1}$ so dass $(\leq n\, r\, C) \in \mathcal{L}(v)$, $(v, r, v_i) \in E$ und $C \in \mathcal{L}(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Zeige, dass der skizzierte Algorithmus auf den folgenden Eingabekonzepten ein falsches Ergebnis liefert:

(a) $C_0 = (\geq 2\, r\, A \sqcap B) \sqcap (\geq 2\, r\, A \sqcap B') \sqcap (\leq 3\, r\, A)$

(b) $C_0 = (\geq 3\, r\, A) \sqcap (\leq 1\, r\, B) \sqcap (\leq 1\, r\, \neg B)$

Aufgabe 6: 20% (Zusatzaufgabe)

Mit $\mathcal{ALC}_{\text{trans}}$ bezeichnen wir die Erweiterung von $\mathcal{ALC}$ um transitive Rollen, d.h. die TBox darf nun zusätzlich zu Konzeptinklusionen auch Zusicherungen der Form $\text{trans}(r)$ enthalten, wobei r ein Rollenname ist. Eine Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt $\text{trans}(r)$ wenn $r^\mathcal{I}$ eine transitive Relation ist.

Sei $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{ALC}_{\text{trans}}$ TBox der Form $\{\top \sqsubseteq C_\mathcal{T}\}$ mit $C_\mathcal{T}$ in NNF. Wir definieren eine $\mathcal{ALC}$ TBox $\mathcal{T}^*$ wie folgt:

- $\mathcal{T}^*$ enthält $\top \sqsubseteq C_\mathcal{T}$;
- für jedes $\forall r.C \in \text{sub}(C_\mathcal{T})$ mit $\text{trans}(r) \in \mathcal{T}$ enthält $\mathcal{T}^*$ die Konzeptinklusion $\forall r.C \sqsubseteq \forall r.\forall r.C$.

Beweise, dass ein Konzeptname A erfüllbar ist bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. A erfüllbar ist bzgl. $\mathcal{T}^*$.

Über diese Reduktion kann man den Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ also auch für $\mathcal{ALC}_{\text{trans}}$ verwenden.