AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

Cartesium 2.59
clu@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Beschreibungslogik“

Aufgabe 1: 20%

Beweise die offenen Punkte von Lemma 2.8: für alle generellen TBoxen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{ALC}$-Konzepte C, D gilt:

(a) C ist erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T} \not\models C \equiv \bot$

(b) $\mathcal{T} \models C \equiv D$ gdw. $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

Use the definitions, luke!

Aufgabe 2: 30%

Für jedes der Interpretationspaare $\mathcal{I}_i, \mathcal{J}_i$ auf der gegenüberliegenden Seite bestimme ob es ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt mit $d \in C^{\mathcal{I}_i}$ und $e \notin C^{\mathcal{J}_i}$ oder umgekehrt. Wenn dies der Fall ist, gib das Konzept C explizit an. Wenn nicht, gib eine Bisimulation an, die zeigt, dass $(\mathcal{I}_i, d) \sim (\mathcal{J}_i, e)$.

Aufgabe 3: 20%

Beweise, dass die folgenden Eigenschaften nicht in $\mathcal{ALC}$ ausdrückbar sind, wobei r und s feste Rollennamen sind:

(a) $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid (d,d) \in r^{\mathcal{I}}\}$;

(b) $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists e : (d,e) \in r^{\mathcal{I}} \text{ and } (d,e) \in s^{\mathcal{I}}\}$.

Verwende Bisimulation und verfahre wie im Beweis von Theorem 3.3.

Aufgabe 4: 30%

Folgender Algorithmus berechnet eine Bisimulation zwischen gegebenen endlichen Interpretationen $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$:

- Starte mit der Relation $R = \{(d,e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid d \in A^{\mathcal{I}} \text{ gdw. } e \in A^{\mathcal{J}} \text{ für alle Konzeptnamen } A\}$.
- Wiederhole erschöpfend:
  (i) wenn $(d,e) \in R$, $(d,d') \in r^{\mathcal{I}}$ und es kein $(e,e') \in r^{\mathcal{J}}$ gibt mit $(d',e') \in R$, dann entferne (d,e) aus R
  (ii) wenn $(d,e) \in R$, $(e,e') \in r^{\mathcal{J}}$ und es kein $(d,d') \in r^{\mathcal{I}}$ gibt mit $(d',e') \in R$, dann entferne (d,e) aus R.

(a) Wende den Algorithmus auf die Interpretationen $\mathcal{I}_3, \mathcal{J}_3$ auf der gegenüberliegenden Seite an;

(b) Zeige: für jede beliebige Eingabe $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ ist die errechnete Relation R eine Bisimulation;

(c) Zeige: für jede beliebige Eingabe $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ und *jede* Bisimulation B zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ gilt: $B \subseteq R$ (die errechnete Relation R ist also die *größte Bisimulation* zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$).
Hinweis: betrachte die vom Algorithmus berechnete Folge von Relationen $R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_k = R$. Zeige, dass $B \subseteq R_i$ für $0 \leq i \leq k$.

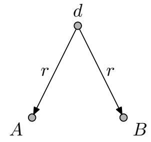
Aufgabe 5: 20% (Zusatzaufgabe)

Beweise, dass eine der folgenden Aussagen wahr ist und eine falsch:

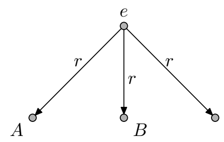
(a) wenn ρ_1 und ρ_2 Bisimulationen zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ sind, dann auch $\rho_1 \cup \rho_2$

(b) wenn ρ_1 und ρ_2 Bisimulationen zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ sind, dann auch $\rho_1 \cap \rho_2$

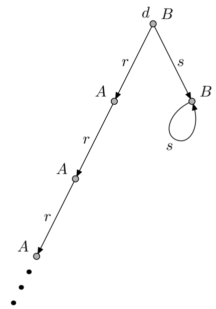
$\mathcal{I}_1$:



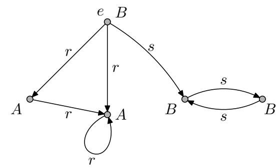
$\mathcal{J}_1$:



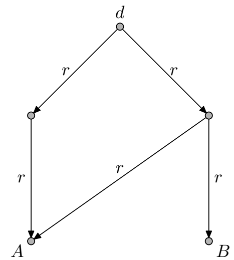
$\mathcal{I}_2$:



$\mathcal{J}_2$:



$\mathcal{I}_3$:



$\mathcal{J}_3$: