

Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: ABoxen und Anfragebeantwortung
- Kapitel 7: Effiziente Beschreibungslogiken

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Ziel des Kapitels

Die wichtigsten Eigenschaften einer BL sind

- Ausdrucksstärke und
- Komplexität

Die Ausdrucksstärke kann man nicht linear quantifizieren, sondern nur beschreiben und charakterisieren.

Wir

- etablieren mehrere Konstruktionen auf Modellen und
- verwenden diese, um die Ausdrucksstärke von BLen zu studieren.

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Bisimulation

Überblick

- Bisimulation ist graphentheoretischer Begriff
beschreibt die “Ähnlichkeit” von Graphen
- Hängt eng zusammen mit der Ausdruckstärke von *ALC*
- Wir formalisieren den Zusammenhang, betrachten zwei Anwendungen:
 - Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften
 - Baummodelleigenschaft

Bisimulation

Definition 3.1 (Bisimulation)

Seien \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 Interpretationen

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist *Bisimulation* zwischen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 wenn

1. $d_1 \rho d_2$ impliziert dass $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$, für alle Konzeptnamen A
2. $d_1 \rho d_2$ und $(d_1, d'_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d'_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d_2, d'_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$, für alle Rollennamen r
3. $d_1 \rho d_2$ und $(d_2, d'_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ impliziert die Existenz eines $d'_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d_1, d'_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$, für alle Rollennamen r

T3.1

Bisimulation

Seien \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$: es gibt Bisimulation ρ zwischen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 mit
 $d_1 \rho d_2$ (wir sagen: d_1 ist *bisimilar* zu d_2).

Beachte: die leere Relation ist immer Bisimulation!

Theorem 3.2.

Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle **ALC**-Konzepte C :
 $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$.

T3.2

Intuitiv: **ALC** kann nicht zwischen d_1 und d_2 “unterscheiden”.

Ausdrucksstärke

Wir interessieren uns für Eigenschaften von Element d in Interpretation \mathcal{I} :

- d hat einen r -Nachfolger;
- es gibt einen von d ausgehenden endlichen r -Pfad, dessen letztes Element Instanz von C ist;
- jedes Element von $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist r -Nachfolger von d .

Frage: ist Eigenschaft *ausdrückbar* in \mathcal{ALC} (durch Konzept beschreibbar)?

Eigenschaft kann auch in logischem Formalismus gegeben sein, z.B.:

- $\exists r^{-}.A$
- $\exists y (r(y, x) \wedge A(y))$

Ausdrückbarkeit: gibt es äquivalentes \mathcal{ALC} -Konzept?

Anwendungen von Bisimulation I

Beschränkungen der Ausdruckstärke von \mathcal{ALC} beweisen.

Das ist schwierig mit syntaktischen Argumenten,

Bisimulation erlaubt semantisches Argument!

Theorem 3.3.

In \mathcal{ALC} sind nicht ausdrückbar:

- das \mathcal{ALCI} -Konzept $\exists r^-. \top$;
- die \mathcal{ALCQ} -Konzepte
 - $(\leq n r \top)$ für alle $n > 0$ und
 - $(\geq n r \top)$, für alle $n > 1$.

T3.3

Anwendungen von Bisimulation II

Interpretation ist *Baum* gdw. $(\Delta^{\mathcal{I}}, \bigcup_r r^{\mathcal{I}})$ Baum (endl. oder unendl.)

\mathcal{ALC} hat die *Baummodelleigenschaft*:

Theorem 3.4.

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} .

\mathcal{I} Baum, Wurzel in $C^{\mathcal{I}}$

T3.4

Grundlage für Algorithmen, erlaubt Aussagen über Ausdrucksstärke

Beweis der Baummodelleigenschaft mittels fundamentaler Modellkonstruktion:

Unravelling.

Anwendungen von Bisimulation II

Sei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

d -Pfad in \mathcal{I} : Sequenz $d_0 d_1 \cdots d_{n-1}$, $n \geq 1$, mit

- $d_0 = d$
- für alle $i < n$: es gibt Rollenname r mit $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$

Wir setzen $\text{end}(d_0 \cdots d_{n-1}) = d_{n-1}$

T3.6

Definition 3.5. (Unravelling)

Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d ist folgende Interpretation \mathcal{J} :

$\Delta^{\mathcal{J}} =$ Menge aller d -Pfade in \mathcal{I}

$A^{\mathcal{J}} = \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \text{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\}$

$r^{\mathcal{J}} = \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid \exists e : p' = p \cdot e \text{ und } (\text{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}$

für alle Konzeptnamen A und Rollenamen r .

T3.6 cont

Anwendungen von Bisimulation II

Sei \mathcal{J} Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d .

Lemma 3.6.

Für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:
 $\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}}$ gdw $p \in C^{\mathcal{J}}$.

T3.7

Es folgt Theorem 3.4.

Theorem 3.4.

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist,
dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} .

T3.8

Baummodelleigenschaft gilt nicht in FO.

Bisimulation

Entsprechen Bisimulationen *genau* der Ausdrucksstärke von \mathcal{ALC} ?

Nein! Gegenrichtung von Theorem 3.2 gilt nicht:

Es gibt Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} und $d \in \mathcal{I}$, $x \in \mathcal{J}$ so dass $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $x \in C^{\mathcal{J}}$ für all \mathcal{ALC} -Konzepte C , aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, x)$.

T3.9

Sie gilt allerdings für verschiedene Modellklassen, z.B.:

- die Klasse aller endlichen Modelle;
- die Klasse aller Modelle mit endlicher Verzweigungszahl;
- etc.

Derartige Klassen nennt man Hennessy-Milner Klassen.

Erweiterungen von ALC

Für \mathcal{ALCI} , \mathcal{ALCQ} und \mathcal{ALCQI} gibt es ebenfalls Bisimulationsbegriffe.

Zusätzliche Bedingungen für \mathcal{ALCI} :

4. $d_1 \rho d_2$ und $(d'_1, d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d'_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d'_2, d_2) \in r^{\mathcal{I}_1}$, für alle Rollennamen r
5. $d_1 \rho d_2$ und $(d'_2, d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ impliziert die Existenz eines $d'_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d'_1 \rho d'_2$ und $(d'_1, d_1) \in r^{\mathcal{I}_2}$, für alle Rollennamen r

Dann gilt Theorem 3.2 und man kann z.B. Baummodell-Eigenschaft für \mathcal{ALCI} beweisen (Kanten im Baum können auch zur Wurzel gerichtet sein).

Auch \mathcal{ALCQ} und \mathcal{ALCQI} haben die Baummodelleigenschaft.

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Endliche Modelleigenschaft und Filtration

Überblick

- Endliche Modelleigenschaft: wenn \mathcal{C} erfüllbar bzgl. \mathcal{T} , dann haben \mathcal{C} und \mathcal{T} auch *endliches* Modell
- Filtration wandelt Modell von Konzeptes und TBox in endliches Modell
- Zentrale Idee: Identifikation ununterscheidbarer Elemente (Im Sinne von: erfüllen dieselben Konzepte)

Größe von Konzepten und TBoxen

Definition 3.9.

Größe $|C|$ eines \mathcal{ALC} -Konzeptes C ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \\ |\neg C| &= |C| + 1 \\ |C \sqcap D| &= |C \sqcup D| = |C| + |D| + 1 \\ |\exists r.C| &= |\forall r.C| = |C| + 3 \end{aligned}$$

Größe $|\mathcal{T}|$ einer TBox \mathcal{T} ist

$$\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1$$

Intuitiv: Anzahl Symbole in C bzw. \mathcal{T} .

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

\mathcal{ALC} hat endliche Modelleigenschaft:

Theorem 3.10.

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames endliches Modell.

Gilt nicht in der Logik erster Stufe!

\mathcal{ALC} hat sogar beschränkte Modelleigenschaft:

Theorem 3.11.

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Modell der Kardinalität $2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Typ

Im folgenden sei C \mathcal{ALC} -Konzept und \mathcal{T} TBox, so dass C erfüllbar bzgl. \mathcal{T} .

Wir definieren den Begriffs eines “Typs”:

- ist Menge von Konzepten;
- beschreibt einen Punkt $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ in einer Interpretation \mathcal{I} ;
- um Endlichkeit zu erreichen:

Einschränkung auf Teilkonzepte von C und \mathcal{T}

Zentral für viele Techniken im Bereich Beschreibungslogik

Typ

Definition 3.12. (Teilkonzepte)

- $\text{sub}(C)$ ist Menge der Teilkonzepte von C , einschliesslich C .
- $\text{sub}(\mathcal{T}) = \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \text{sub}(C) \cup \text{sub}(D)$.
- $\text{sub}(C, \mathcal{T}) := \text{sub}(C) \cup \text{sub}(\mathcal{T})$.

T3.10

Lemma 3.13.

$$|\text{sub}(C, \mathcal{T})| \leq |C| + |\mathcal{T}|.$$

Typ

Definition 3.14. (Typ von d)

Sei \mathcal{I} Interpretation, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Typ $t_{\mathcal{I}}(d)$ von d in \mathcal{I} ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}. \quad \text{T3.11}$$

Lemma 3.15.

Für jede Interpretation \mathcal{I} gilt $|\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}| \leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Filtration: Idee

- Gegeben Interpretation \mathcal{I} , identifiziere alle Elemente gleichen Typs
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur $2^{|\mathcal{C}|+|\mathcal{T}|}$ viele Typen
- Wenn \mathcal{I} Modell von \mathcal{C} und \mathcal{T} , so auch das Resultat

Filtration

Definition 3.16. (Filtration)

Sei \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T} . Definiere Äquivalenzrelation \sim auf $\Delta^{\mathcal{I}}$:

$$d \sim e \text{ gdw. } t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e).$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzgl. \sim mit $[d]$.

Die *Filtration* von \mathcal{I} bzgl. C und \mathcal{T} ist folgende Interpretation \mathcal{J} : T3.11cont

$$\Delta^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$$

$$A^{\mathcal{J}} = \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\} \text{ für alle } A \in \text{sub}(C, \mathcal{T})$$

$$r^{\mathcal{J}} = \{([d], [e]) \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\} \text{ für alle } r \in \mathbf{N}_R$$

Beachte: $A^{\mathcal{J}}$ is wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit).

Theorem 3.17.

Wenn \mathcal{I} Modell von C und \mathcal{T} , so auch \mathcal{J} .

T3.12

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

Theorem 3.11 folgt nun unmittelbar aus Theorem 3.17 und Lemma 3.15.

Theorem 3.11.

Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bzgl. einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Modell der Kardinalität $2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Ähnliche Resultate lassen sich für \mathcal{ALCI} und \mathcal{ALCQ} beweisen.
(mit derselben Schranke)

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

Theorem 3.18.

\mathcal{ALCQI} hat nicht die endliche Modelleigenschaft.

Beweis:

\mathcal{A} hat nur unendliche Modelle bzgl. folgender TBox:

$$\begin{aligned} \top &\sqsubseteq \exists r. \neg A \\ \top &\sqsubseteq (\leq 1 r^{-} \top) \end{aligned}$$

T3.13

Filtration für \mathcal{ALCQI} also nicht anwendbar.