Dr. Thomas Schneider SS 2015

Automatentheorie und ihre Anwendungen

Übungsblatt 5

Abgabe am 30. 6. zu Beginn der Übung

---

1. (30 %) Betrachte folgenden Ansatz für eine Prozedur zum Determinisieren von Büchi-Automaten:

Die Grundidee ist, wie in der ursprünglichen Potenzmengenkonstruktion sowohl die Menge der erreichbaren Zustände zu „speichern" sowie zusätzlich die Menge der Zustände, die seit dem letzten Zurücksetzen (Löschen der Markierung (!)) erreicht werden. Dann ist ein Run erfolgreich, wenn auf ihm unendlich oft zurückgesetzt wird. Dies kann man als eine Vereinfachung von Safras Konstruktion ansehen, bei der es nur eine einzige Ebene unterhalb der Wurzel und dort nur maximal ein Kind gibt.

Genauer: gegeben einen NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, konstruiere den DBA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

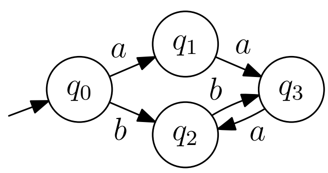
- $Q' = \{(X, Y, m) \mid Y \subseteq X \subseteq Q,\ m \in \{\text{(!)}, \bigcirc\}$
- $I' = \{(I, \emptyset, \bigcirc)\}$
- $F' = \{(X, \emptyset, \text{(!)}) \mid X \subseteq Q\}$
- $\big((X, Y, m), a, (X', Y', m')\big) \in \Delta'$ genau dann, wenn man (X', Y', m') mit der folgenden Konstruktion aus (X, Y, m) erhält.
  (1) Setze $m = \bigcirc$.
  (2) Füge $X \cap F$ zur Menge Y hinzu.
  (3) Wende die originale Potenzmengenkonstruktion auf X und Y an.
  (4) Wenn $X = Y \neq \emptyset$, dann setze $Y = \emptyset$ und $m = \text{(!)}$.

Zeige, dass diese Konstruktion *korrekt* ist (d. h. keine „schlechten" Wörter werden akzeptiert), aber nicht *vollständig* (d. h. mindestens ein „gutes" Wort wird möglicherweise nicht akzeptiert):

a) Zeige, dass für alle Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

b) Gib einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an mit $L_\omega(\mathcal{A}') \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

2. (20 %) Betrachte Büchi-Automaten, deren Zustände, Anfangszustand und Überführungsrelation im nebenstehenden Bild gegeben sind. Ist die erkannte ω-Sprache leer, wenn die Endzustandsmenge wie folgt gewählt wird? Begründe jeweils.



a) $\mathcal{F} = \{q_0, q_1\}$ b) $\mathcal{F} = \{q_2, q_3\}$ c) $\mathcal{F} = \{q_1, q_3\}$

Bitte wenden.

3. (20 %) Gib LTL-Formeln an, die die folgenden Eigenschaften über den atomaren Aussagen p, q ausdrücken.

   a) Zu keinem Zeitpunkt in der Zukunft sind p und q gleichzeitig wahr.

   b) Wenn p unendlich oft wahr ist, dann gibt es einen Zeitpunkt in der Zukunft, von dem an immer q wahr ist.

   c) p ist unendlich oft wahr, und zwischen zwei Zeitpunkten mit p ist immer q wahr.

4. (30 %) Gegeben ist die LTL-Formel $\varphi = a \mathsf{U} b$ mit den Aussagenvariablen a, b. Konstruiere den zugehörigen GNBA $\mathcal{A}_\varphi$ gemäß der Konstruktion aus der Vorlesung.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Zeige, dass es keine Zahl $k \geq 1$ gibt, so dass die folgende Aussage gilt:

   Wenn $L \subseteq \Sigma^\omega$ Büchi-erkennbar ist, dann gibt es einen Büchi-Automaten mit höchstens k Endzuständen, der L erkennt.

   Hinweis: Betrachte die Sprachen $\{a^\omega\}$, $\{a^\omega, b^\omega\}$, $\{a^\omega, b^\omega, c^\omega\}$, $\ldots$.