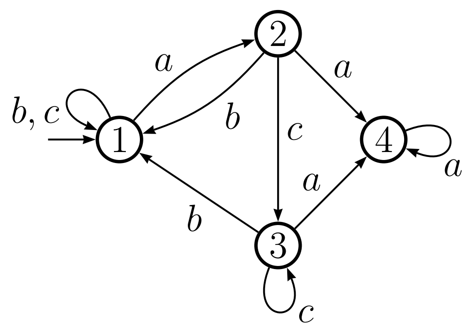
Dr. Thomas Schneider SS 2014

Automatentheorie und ihre Anwendungen

Übungsblatt 5

Abgabe am 9. 7. zu Beginn der Übung

1. (20 %) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ die Müller-Automaten, deren Zustände und Überführungen im unten stehenden Bild angegeben sind, und deren Akzeptanzbedingungen wie folgt definiert sind: $\mathcal{F}_1 = \{\{2,3\}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\{1\},\{1,4\}\}$, $\mathcal{F}_3 = \{\{3\},\{1,2\}\}$ und $\mathcal{F}_4 = \{\{1,2,3\}\}$. Bestimme die Sprachen $L_\omega(\mathcal{A}_1), L_\omega(\mathcal{A}_2), L_\omega(\mathcal{A}_3), L_\omega(\mathcal{A}_4)$.



Die Sprachen dürfen als (möglichst einfache) ω-reguläre Ausdrücke angegeben werden; das Ergebnis sollte kurz begründet werden.

2. (25 %) Konstruiere Müller-, Rabin- und Streett-Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$, die die folgenden Sprachen erkennen.

   a) $\{w \mid 0 \text{ kommt in } w \text{ genau zwei Mal vor}\}$

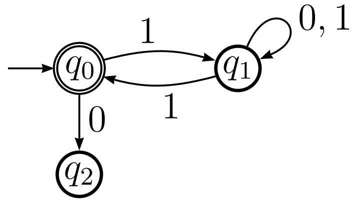
   b) $\{w \mid \text{jede } 0 \text{ in } w \text{ wird direkt von } 11 \text{ gefolgt}\}$

   c) $\{w \mid w \text{ enthält endlich oft } 1\}$

   d) $\{w \mid w \text{ enthält endlich viele Teilwörter } 11\}$

   e) $\{w \mid w = 1^\omega \text{ oder } w \text{ enthält unendlich oft } 0 \text{ und unendlich oft } 1\}$

3. (25 %) Wende die Konstruktion von Safra schrittweise auf den nebenstehenden Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an. Begründe, dass der entstandene Rabin-Automat dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt.



Bitte wenden.

4. (30 %) Betrachte folgenden Ansatz für eine Prozedur zum Determinisieren von Büchi-Automaten:

Die Grundidee ist, wie in der ursprünglichen Potenzmengenkonstruktion sowohl die Menge der erreichbaren Zustände zu „speichern“ sowie zusätzlich die Menge der Zustände, die seit dem letzten Zurücksetzen (Löschen der Markierung $\textcircled{!}$) erreicht werden. Dann ist ein Run erfolgreich, wenn auf ihm unendlich oft zurückgesetzt wird. Dies kann man als eine Vereinfachung von Safras Konstruktion ansehen, bei der es nur eine einzige Ebene unterhalb der Wurzel und dort nur maximal ein Kind gibt.

Genauer: gegeben einen NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, konstruiere den DBA $\mathcal{A} = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \{(X, Y, m) \mid Y \subseteq X \subseteq Q,\ m \in \{\textcircled{!}, \bigcirc\}$
- $I' = \{(I, \emptyset, \bigcirc)\}$
- $F' = \{(X, \emptyset, \textcircled{!}) \mid X \subseteq Q\}$
- $\big((X, Y, m), a, (X', Y', m')\big) \in \Delta'$ genau dann, wenn man (X', Y', m') mit der folgenden Konstruktion aus (X, Y, m) erhält.
  (1) Setze $m = \bigcirc$.
  (2) Füge $X \cap F$ zur Menge Y hinzu.
  (3) Wende die originale Potenzmengenkonstruktion auf X und Y an.
  (4) Wenn $X = Y \neq \emptyset$, dann setze $Y = \emptyset$ und $m = \textcircled{!}$.

Zeige, dass diese Konstruktion *korrekt* ist (d. h. keine „schlechten“ Wörter werden akzeptiert), aber nicht *vollständig* (d. h. mindestens ein „gutes“ Wort wird möglicherweise nicht akzeptiert):

a) Zeige, dass für alle Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

b) Gib einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an mit $L_\omega(\mathcal{A}) \nsubseteq L_\omega(\mathcal{A}')$.

---

5. (Zusatzaufgabe, bis zu 15 %) Beweise, dass jede Müller-erkennbare Sprache eine Boolesche Kombination (Vereinigung, Schnitt, Komplement) von endlich vielen ω-Sprachen $\overrightarrow{W_i}$ ist, wobei jedes W_i eine reguläre Sprache ist.