Automatentheorie und ihre Anwendungen Teil 4: Automaten auf unendlichen Bäumen (Ausblick)

Thomas Schneider

16.–17. Juli 2014

Überblick

- Grenzen von LTL – welche Eigenschaften kann man nicht ausdrücken?
- Berechnungsbäume und CTL
- Ausdrucksvermögen von LTL und CTL im Vergleich
- Model-Checking mit CTL
- zugehöriges Automatenmodell: Büchi-Automaten auf unendlichen Bäumen
- äquivalente Automatenmodelle

Und nun ...

1. *Model-Checking mit CTL*
2. Automaten auf unendlichen Bäumen

Erinnerung an LTL *(Linear Temporal Logic)*

- System gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, L)$
- LTL-Formel φ_E beschreibt Pfade, die Eigenschaft E erfüllen
- Beispiel:
  „Wenn Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
  $G(e \rightarrow F\neg e)$ ($e \in$ PROP steht für „Error")
- Umwandlung φ_E in GNBA $\mathcal{A}_E$, der zulässige Pfade beschreibt
- lösen damit Model-Checking-Problem:
  - Gilt E für *alle* Pfade ab S_0 in $\mathcal{S}$?
    (universelle Variante)
  - Gilt E für *mindestens einen* Pfad ab S_0 in $\mathcal{S}$?
    (existenzielle Variante)

LTL 1977 eingeführt durch Amir Pnueli, 1941-2009,
israelischer Informatiker (Haifa, Weizmann-Inst., Stanford, Tel Aviv, New York)

Grenzen von LTL

„LTL-Formel φ_E beschreibt Pfade, die Eigenschaft E erfüllen“

Nicht ausdrückbar: zu jedem Zeitpunkt ist es immer *möglich*, die Berechnung auf eine gewisse Weise fortzusetzen

Beispiel: „Wenn ein Fehler auftritt,
ist es *möglich*, ihn nach endlicher Zeit zu beheben.“

$G(e \rightarrow F\neg e)$ oder $GF\neg e$ sind zu stark •

Ein Fall für CTL *(Computation Tree Logic)*

Abhilfe: Betrachten Berechnungsbäume statt Pfaden

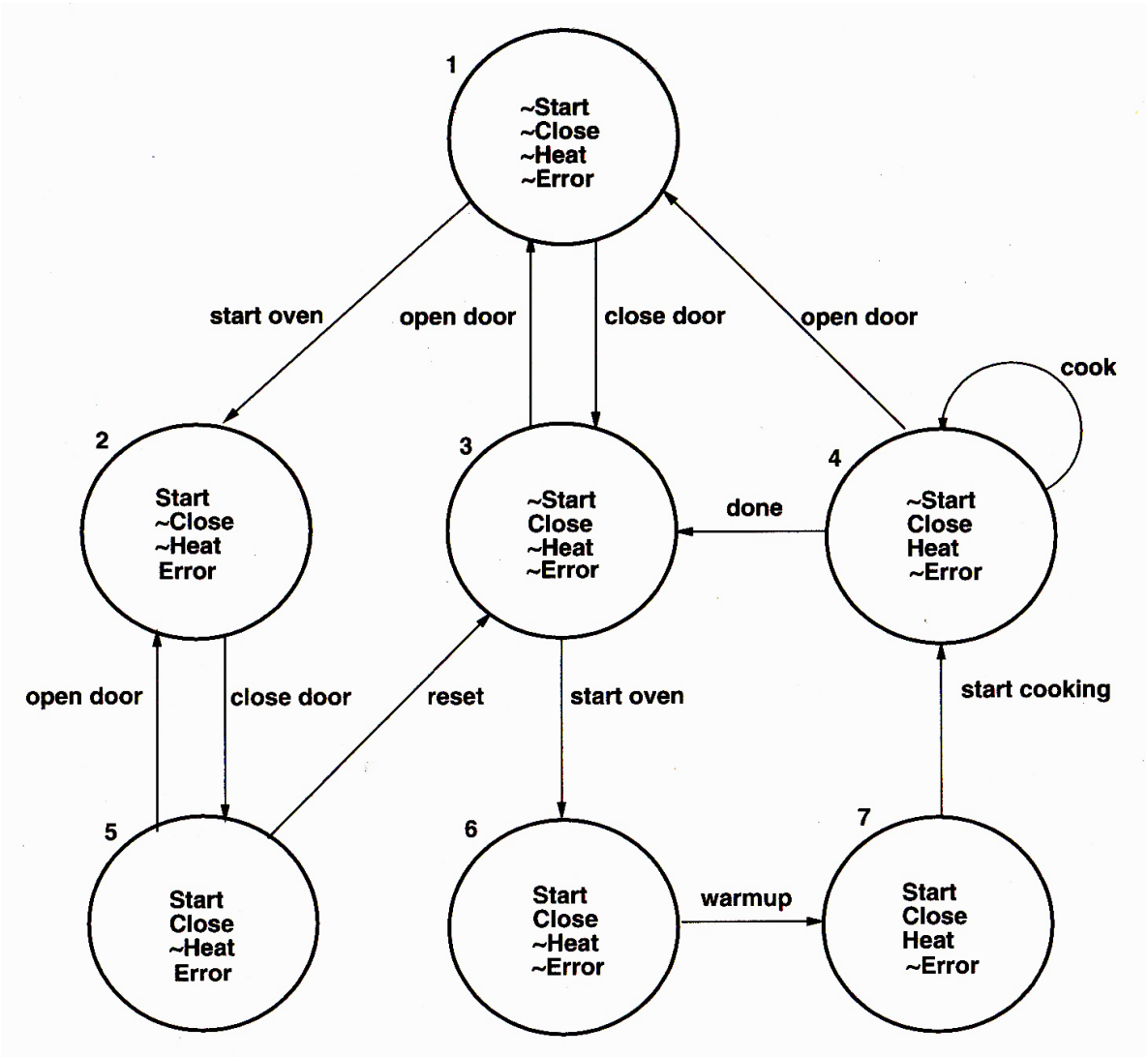
- Idee: Baum enthält *alle* Pfade, die in s_0 starten

$\rightsquigarrow$ Zustand s hat als Kinder alle seine Nachfolgerzustände in $\mathcal{S}$

$\rightsquigarrow$ Baum entsteht durch „Auffalten“ von $\mathcal{S}$ in s_0

- Beispiel: siehe nächste Folie & Tafel

Beispielstruktur Mikrowelle



aus: E. M. Clarke et al., Model Checking, MIT Press 1999

CTL intuitiv

CTL enthält **Pfadquantoren** A, E:

Operatoren, die über **alle** oder **einige** Berechnungen sprechen,
die in einem bestimmten Zustand beginnen

Beispiel: $AGEF\neg e$

> Für alle Berechnungen, die hier starten (A)
> gibt es zu jedem Zeitpunkt in der Zukunft (G)
> eine Möglichkeit, die Berechnung fortzusetzen (E),
> so dass irgendwann in der Zukunft (F)
> kein Fehler auftritt ($\neg e$)

CTL 1981 eingeführt durch
Edmund M. Clarke, *1945, Informatiker, Carnegie Mellon Univ. (Pittsburgh)
E. Allen Emerson, ?, Informatiker, Univ. of Texas, Austin, USA
(beide Turing-Award-Träger 2007)

CTL formal

Trennung von Zustands- und Pfadformeln:

Zustandsformeln drücken Eigenschaften eines Zustandes aus

$$\zeta ::= p \mid \zeta_1 \wedge \zeta_2 \mid \zeta_1 \vee \zeta_2 \mid \neg\zeta \mid E\psi \mid A\psi$$

(p: Aussagenvariable; ζ, ζ_1, ζ_2: Zustandsformeln; ψ: Pfadformel)

Pfadformeln drücken Eigenschaften eines Pfades aus

$$\psi ::= F\zeta \mid G\zeta \mid X\zeta \mid \zeta_1 \; U \; \zeta_2$$

(ζ, ζ_1, ζ_2: Zustandsformeln)

$\rightsquigarrow$ in **zulässigen** CTL-Formeln muss

- jeder Pfadquantor von e. temporalen Operator gefolgt werden
- jeder temporale Operator direkt einem Pfadquantor folgen

Quiz: zulässige Formeln

Zur Erinnerung:

$$(ZF) \quad \zeta ::= p \mid \zeta_1 \wedge \zeta_2 \mid \zeta_1 \vee \zeta_2 \mid \neg\zeta \mid E\psi \mid A\psi$$
$$(PF) \quad \psi ::= F\zeta \mid G\zeta \mid X\zeta \mid \zeta_1 \; U \; \zeta_2$$

Frage: Welche der folgenden Formeln sind zulässig?

- $p \wedge q \quad EFp \quad AXp$ ✓
- $E(p \; U \; q)$ ✓
- $A((p \vee \neg p) \; U \; q)$ ✓ (äquivalent zu AFq)
- $E(p \vee AXq)$ ✘
- $EX(p \vee AXq)$ ✓
- $EF(p \; U \; q)$ ✘
- $EFA(p \; U \; q)$ ✓

Zurück zu unseren Beispielen: Spezifikationen in CTL

Beispiel Nebenläufigkeit

- Es kommt nie vor,
  dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind.
  $AG\neg(p_{12} \wedge p_{22})$ ($p_i \in$ PROP: „Programmzähler in Zeile i“)
- Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich.
  $AGAFp_{12} \wedge AGAFp_{22}$
- Jedes Teilprog. *kann* beliebig oft in seinen kB kommen.
  $AGEFp_{12} \wedge AGEFp_{22}$

- $AGAF\zeta$ besagt: „ζ ist für alle Berechnungen ∞ oft wahr“
  $AGEF\zeta$ besagt: „jede begonnene Berechnung kann so fortgesetzt werden, dass ζ irgendwann wahr wird.“
  (liveness properties)

Zurück zu unseren Beispielen: Spezifikationen in CTL

Beispiel Mikrowelle

- „Wenn Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben."
  $AG(e \rightarrow AF\neg e)$ ($e \in$ PROP steht für „Error")
- „Wenn Fehler auftritt, *kann* er nach endl. Z. behoben werden"
  $AG(e \rightarrow EF\neg e)$
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  beginnt sie nach endlicher Zeit zu heizen."
  $AG(s \rightarrow AFh)$ ($s, h \in$ PROP stehen für „Start" bzw. „Heat")
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
  ist es möglich, dass sie nach endlicher Zeit zu heizen beginnt."
  $AG(s \rightarrow EFh)$

- $AG(\zeta_1 \rightarrow AF\zeta_2)$, $AG(\zeta_1 \rightarrow EF\zeta_2)$: **progress properties**

CTL im Kontext anderer Temporallogiken

(Semantik ähnlich wie für LTL definiert)

LTL und CTL sind **bezüglich Ausdrucksstärke unvergleichbar**.

- Bsp.: $\zeta = AFAGp$ und $\varphi = FGp$ **nicht** äquivalent
- es gibt keine zu ζ äquivalente LTL-Formel (o. Beweis)
- es gibt keine zu φ äquivalente CTL-Formel (o. Beweis)

Erweiterung von LTL und CTL: **CTL***

eingeführt 1986 von E. Allen Emerson und Joseph Y. Halpern
(J. Y. Halpern, ?, Informatiker, Cornell University (Ithaca, NY, USA))

Model-Checking für CTL (Skizze)

Standard-Algorithmus („bottom-up labelling“, ohne Automaten):

- Gegeben: Kripke-Str. $\mathcal{S}$, Zust. s_0, CTL-Zustandsformel ζ
- Frage: $\mathcal{S}, s_0 \models \zeta$, d. h. ist ζ in $\mathcal{S}, s_0$ erfüllt?
- Stelle ζ_E als Baum dar (Bsp. $\zeta_E = p \wedge AXE(q\ U\ r)$)
- Gehe Baum von unten nach oben durch
  und markiere Zustände s in $\mathcal{S}$ mit der jeweiligen Teilformel,
  wenn sie in s erfüllt ist
- Akzeptiere gdw. s_0 mit ζ_E markiert ist

Komplexität: P-vollständig
(zur Erinnerung: LTL-MC ist PSPACE-vollständig)

Model-Checking für CTL mit Baumautomaten

Automatenbasierte Entscheidungsprozedur für CTL

- basiert auf **alternierenden Baumautomaten**
  (Erweiterung des Begriffs der nichtdeterminist. Baumautomaten)
- hier nicht behandelt

Verwandt:

Automatenbasierte Entscheidungsprozedur für CTL*-**Erfüllbarkeit**

- basiert auf „klassischen“ Rabin-Baumautomaten
- technisch aufwändige Konstruktion
- hier ebenfalls nicht behandelt

Es folgt:

Überblick klassische nichdeterministische Baumautomaten

Und nun ...

1. *Model-Checking mit CTL*

2. Automaten auf unendlichen Bäumen

Baumautomaten: Grundbegriffe

Betrachten **unendlichen vollständigen Binärbaum**

- Positionen: *alle* Wörter aus $\{0,1\}^*$
- jeder Knoten p hat linkes und rechtes Kind: $p0, p1$
- **Ebene, Vorgängerknoten** definiert wie üblich

Pfad: Teilmenge $\pi \subseteq \{0,1\}^*$ mit

- Wurzel $\varepsilon \in \pi$
- wenn $p \in \pi$, dann genau eins der Kinder $p0, p1$ in π

Σ-Baum t (Alphabet Σ ohne Stelligkeit):

Funktion $t : \{0,1\}^* \to \Sigma$

Baumautomaten: Definition

Definition 1

Ein **nichtdeterministischer Büchi-Baumautomat (NBBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ ein Alphabet ist
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q \times Q$ die **Überführungsrelation** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **Endzustände** ist.

(entsprechen offenbar Top-down-Automaten)

Muller- und Paritäts-Baumautomaten

Definition 2

Ein **nichtdeterministischer Muller-Baumautomat (NMBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$, wobei

- Q, Σ, Δ, I wie für NBBAs sind
- $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ die **Akzeptanzkomponente** ist

Ein **nichtdeterministischer Paritäts-Baumautomat (NPBA)** über Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, c)$, wobei

- Q, Σ, Δ, I wie für NBBAs sind
- $c : Q \to \mathbb{N}$ die **Akzeptanzkomponente** ist

(Rabin- und Streett-Baumautomaten wie üblich definiert)

Runs auf Baumautomaten

Definition 3

Ein **Run** eines NBBA (NMBA, NPBA) $\mathcal{A}$ auf einem Σ-Baum t ist eine Funktion $r : \{0,1\}^* \to Q$, so dass

- $r(\varepsilon) \in I$;
- für alle $p \in \{0,1\}^*$ gilt: $(r(p), t(p), r(p0), r(p1)) \in \Delta$

- Run = Markierung der Positionen in $\{0,1\}^*$ mit Zuständen, verträglich mit Anfangszuständen und Überführungsrelation
- Erfolgreicher Run: verträglich mit Akzeptanzkomponente ($\downarrow$)

Erfolgreiche Runs

Sei r Run eines NxBAs $\mathcal{A}$ und π ein Pfad

Betrachten wieder **Unendlichkeitsmenge**

$$\mathsf{Inf}(r,\pi) = \{q \in Q \mid r(p) = q \text{ für unendlich viele } p \in \pi\}$$

Definition 4

- Run r des NBBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ist **erfolgreich**, falls für alle Pfade π gilt: $\mathsf{Inf}(r,\pi) \cap F \neq \emptyset$
- Run r des NMBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ist **erfolgreich**, falls für alle Pfade π gilt: $\mathsf{Inf}(r,\pi) \in \mathcal{F}$
- Run r des NMPA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, c)$ ist **erfolgreich**, falls für alle Pfade π gilt: $\min\{c(q) \mid q \in \mathsf{Inf}(r,\pi)\}$ ist gerade

$\mathcal{A}$ **akzeptiert** t, wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf t gibt.

$L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } t\}$

Beispiele (Büchi)

- NBBA $\mathcal{A} = (\{A, B\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{A\})$ mit

  $\Delta = \{\ (A, a, A, A),\ (B, a, A, A),\ (A, b, B, B),\ (B, b, B, B)\ \}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat } \infty \text{ viele } a\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{B\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat } \infty \text{ viele } b\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{A, B\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t \text{ ist ein } \Sigma\text{-Baum}\}$

Beispiele (Büchi)

- NBBA $\mathcal{A} = (\{A, B, X\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{A, X\})$

  mit $\Delta = \{\ (A, a, A, X),\ (A, a, X, A),$
  $(B, a, A, X),\ (B, a, X, A),$
  $(A, b, B, X),\ (A, b, X, B),$
  $(B, b, B, X),\ (B, b, X, B),$
  $(X, a, X, X),\ (X, b, X, X)\ \}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t \text{ hat mind. einen Pfad mit } \infty \text{ vielen } a\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{B, X\}$
  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid t \text{ hat mind. einen Pfad mit } \infty \text{ vielen } b\text{'s}\}$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{X\}$: $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$

- derselbe NBBA, aber mit $F = \{A, B\}$: $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$

Beispiele (Muller)

- NMBA $\mathcal{A} = (\{A, B\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{A\},\ \{\{A\}\})$ mit

  $\Delta = \{\ (A, a, A, A),\ (B, a, A, A),\ (A, b, B, B),\ (B, b, B, B)\ \}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat endlich viele } b\text{'s}\}$ (!)

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat endlich viele } a\text{'s}\}$

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{A, B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat } \infty \text{ viele } a\text{'s und } \infty \text{ viele } b\text{'s}\}$

- derselbe NMBA, aber mit $F = \{\{A\}, \{B\}\}$

  $L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat endl. viele } b\text{'s } \textit{oder} \text{ endl. viele } a\text{'s}\}$

Beispiel (Parität)

Zur Erinnerung:

Run r ist erfolgreich, wenn für alle Pfade $\pi \subseteq T$ gilt:

$$\min\{c(q) \mid q \in \mathsf{Inf}(r,\pi)\} \text{ ist gerade}$$

NPBA $\mathcal{A} = (\{A,B\},\ \{a,b\},\ \Delta,\ \{A\},\ c)$ mit

$$\Delta = \{\ (A,a,A,A),\ (B,a,A,A),\ (A,b,B,B),\ (B,b,B,B)\ \}$$

$c(A) = 1$

$c(B) = 2$

$L_\omega(\mathcal{A}) = \{t \mid \text{jeder Pfad hat endlich viele } a\text{'s}\}$

Beziehungen zwischen den Baumsprachenklassen

Satz 5

1. *Jede Büchi-erkennbare Sprache ist Muller-erkennbar.*
2. ***Nicht jede*** *Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.*

Beweisskizze.

1. Wie im letzten Kapitel.
2. Nimm erstes Beispiel auf Folie 24
   und zeige, dass diese Sprache nicht Büchi-erkennbar ist.
   Argumente ähnlich Pumping-Lemma auf endl. Bäumen. (•)

Folgerung 6

Die Klasse der Büchi-erkennbaren Baumsprachen ist ***nicht*** *abgeschlossen unter Komplement.*

Beziehungen zwischen den Baumsprachenklassen

Satz 7

- *Jede Muller-erkennbare Sprache ist paritäts-erkennbar.*
- *Jede paritäts-erkennbare Sprache ist Muller-erkennbar.*

Ohne Beweis.

Abschlusseigenschaften

Satz 8

Die Klasse der . . .

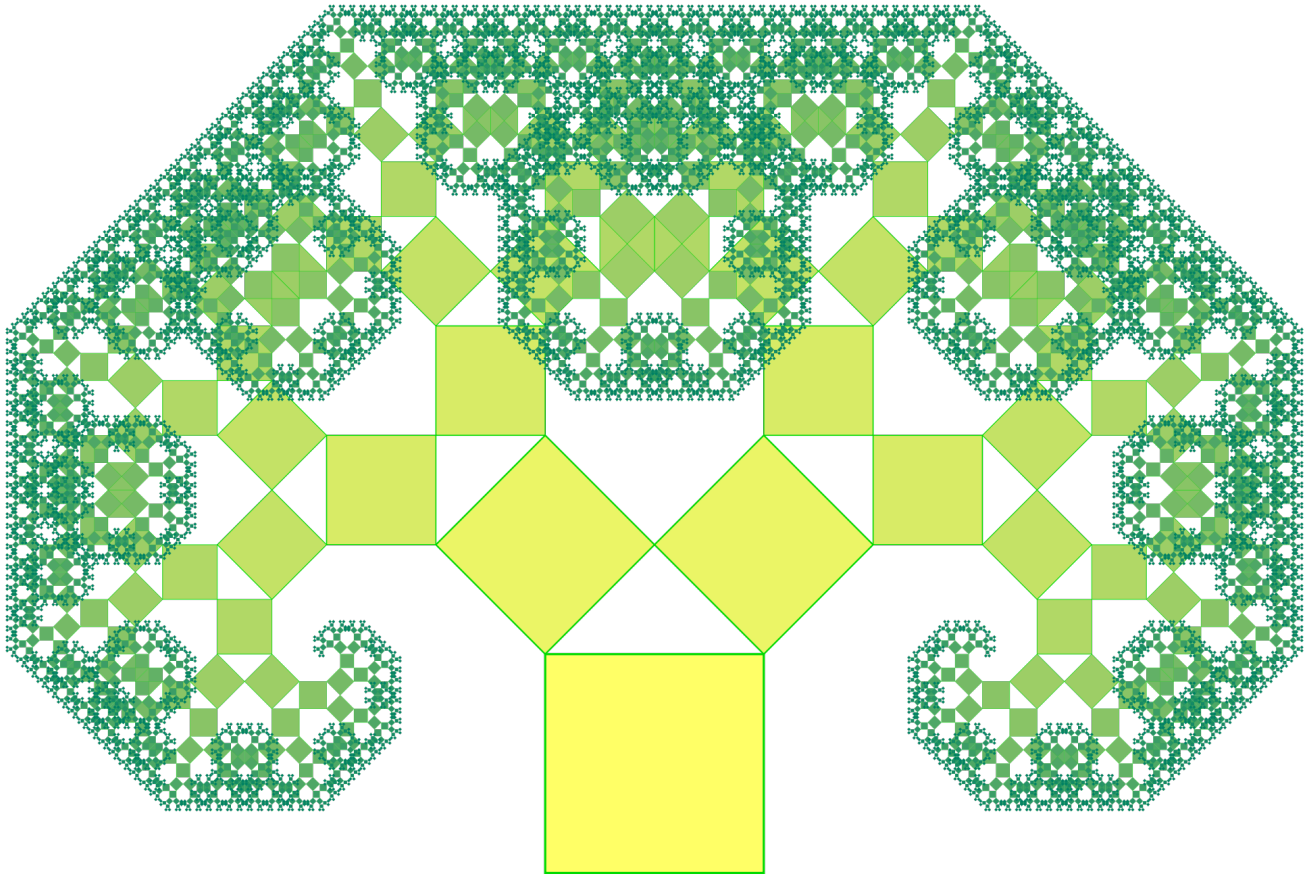
1. *Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter* $\cup$ *und* $\cap$, *aber nicht unter* $^-$.
2. *Muller-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter* $\cup, \cap, ^-$.

Beweisidee:

1. $\cup\, \cap$ wie gehabt; $^-$ siehe Folgerung 6.
2. $\cup\, \cap$ wie gehabt;
   $^-$ anspruchsvoller Beweis, Resultat aus der Spieltheorie (•)

Das war . . .

. . . der Überblick über Automaten auf unendlichen Bäumen.



Pythagoras-Baum. Quelle: Wikipedia, User Gjacquenot (Lizenz CC BY-SA 3.0)

Was jetzt noch fehlt ...

- Kurzbesprechung Übungsblatt 6
- Nachbesprechung Vorlesungsevaluation
- Hinweise zu Fachgesprächen/mündl. Prüfung

Vielen Dank für eure Teilnahme!

Literatur für diesen Teil (1)

E. Grädel, W. Thomas, T. Wilke (Hrsg.).

Automata, Logics, and Infinite Games.

LNCS 2500, Springer, 2002, S. 43–60.

Kapitel 6–9 über Paritätsspiele und Baumautomaten.
`http://www.cs.tau.ac.il/~rabinoa/Lncs2500.zip`

Auch erhältlich auf Anfrage in der BB Mathematik im MZH:
`19h inf 001 k/100-2500`

Meghyn Bienvenu.

Automata on Infinite Words and Trees.

Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
Kapitel 4.

`http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf`

Literatur für diesen Teil (2)

Christel Baier, Joost-Pieter Katoen.

Principles of Model Checking.

MIT Press 2008.

Abschnitt 6 „Computation Tree Logic“.

SUB, Zentrale: a inf 440 ver/782, a inf 440 ver/782a

Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron A. Peled.

Model Checking.

MIT Press 1999.

Abschnitt 3 „Temporal Logics“,
Abschnitt 4 „Model Checking“.

SUB, Zentrale: a inf 440 ver/780(6), a inf 440 ver/780(6)a