Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 3: Automaten auf unendlichen Wörtern

Thomas Schneider

28. Mai – 16. Juli 2014

Überblick

Und nun ...

Terminierung

Terminierung von Algorithmen ist wichtig für Problemlösung.

Übliches Szenario:

- Eingabe: endliche Menge von Daten
- Lasse Programm P laufen, bis es **terminiert**
- Ausgabe: Ergebnis, das durch P berechnet wurde

Um Ausgabe zu erhalten, **muss P für jede Eingabe terminieren**.

Beispiel: Validierung von XML-Dokumenten für gegebenes Schema

- Konstruiere Automaten für Schema und Dokument **(terminiert)**
- Reduziere auf Leerheitsproblem **(terminiert)**
- Löse Leerheitsprob. (sammle erreichb. Zustände – **terminiert**)

Terminierung unerwünscht

Von manchen Systemen/Programmen fordert man,
dass sie **nie terminieren**.

Beispiele:

- (Mehrbenutzer-)Betriebssysteme
  sollen beliebig lange laufen ohne abzustürzen, egal was Benutzer tun
- Bankautomaten, Flugsicherungssysteme,
  Netzwerkkommunikationssysteme, ...

Gängiges Berechnungsmodell:

- endliche Automaten mit nicht-terminierenden Berechnungen
- Terminierung wird als Nicht-Akzeptanz angesehen
- ursprünglich durch Büchi entwickelt (1960)
  Ziel: Algorithmen zur Entscheidung mathematischer Theorien

Ziel dieses Kapitels

- Beschreibung von Automatenbegriffen mit
  nicht-terminierenden Berechnungen
- Betrachtung **unendlicher** Eingaben und Berechnungen
- ausgiebiges Studium von Büchi-Automaten und
  der von ihnen erkannten Sprachen:
  - Definition, Abschlusseigenschaften
  - Charakterisierung mittels regulärer Sprachen
  - Determinisierung
  - Entscheidungsprobleme
- Anwendung: Spezifikation und Verifikation in Linearer
  Temporallogik (LTL)

Beispiel 1: Philosophenproblem (Dining Philosophers Problem)

- erläutert Nebenläufigkeit und Verklemmung von Prozessen
- demonstriert auch unendliche Berechnungen
- hier: einfachste Version mit 3 Philosophen

Philosophenproblem

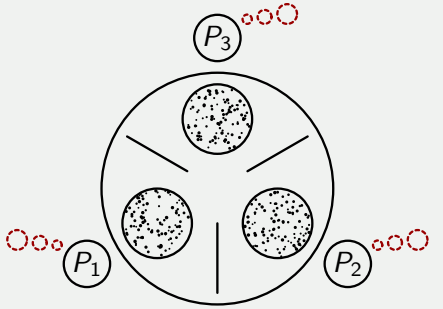
- 3 Philosophen P_1, P_2, P_3
- Für alle i gilt: entweder denkt P_i, oder P_i isst.
- Alle P_i sitzen um einen runden Tisch.
- Jeder P_i hat einen Teller mit Essen vor sich.
- Zwischen je zwei Tellern liegt ein Essstäbchen.
- Um zu essen, muss P_i beide Stäbchen neben seinem Teller benutzen.

$\Rightarrow$ Keine zwei P_i, P_j können gleichzeitig essen.

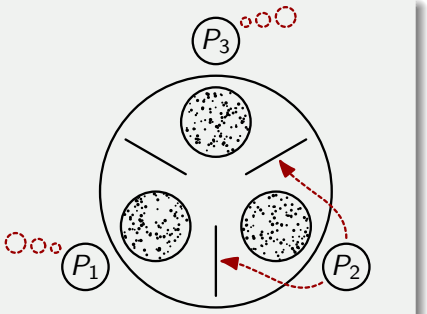
Skizze zum Philosophenproblem

Zusammenfassung

- Für alle i: entweder denkt P_i, oder P_i isst.
- Keine zwei P_i, P_j können gleichzeitig essen.



P_1, P_2, P_3 denken.



P_1, P_3 denken; P_2 isst.

Modellierung durch endliches Transitionssystem

Annahmen

- Am Anfang denken **(d)** alle P_i.
- Reihum können sich P_1, P_2, P_3 entscheiden, ob sie denken oder essen **(e)** wollen.

Zustände des Systems

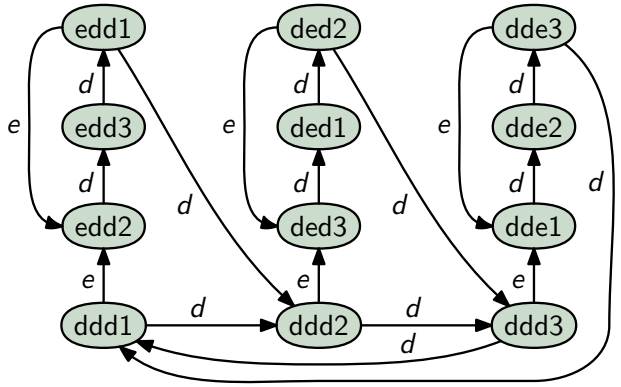
- Anfangszustand ddd1:
  alle P_i denken, und P_1 trifft nächste Entscheidung.
- alle zulässigen Zustände:

ddd1	edd1	ded1	dde1
ddd2	edd2	ded2	dde2
ddd3	edd3	ded3	dde3

Zustandsüberführungen:

d oder e – je nach Entscheidung des P_i, der an der Reihe ist

Das Transitionssystem



Was sind die Eingaben in das System?

Endliche Zeichenketten über $\Sigma = \{d, e\}$?

Dann ist das System ein NEA.

- **Unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{d, e\}$!**

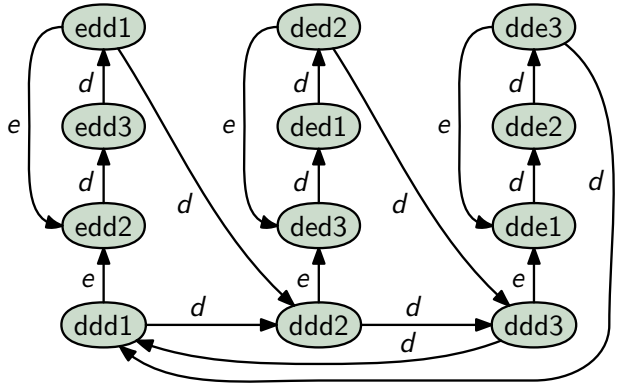
Warum unendliche Zeichenketten?

- Nehmen an, jeder P_i möchte **beliebig oft** denken und essen.
  Dann ist P_i **zufrieden**.
- System soll **beliebig lange** ohne Terminierung laufen.

$\rightsquigarrow$ **mögliche Fragen:**

1. Ist es überhaupt möglich, dass das System beliebig lange läuft?
2. Ist es zusätzlich möglich, dass P_i zufrieden ist?
3. Ist es möglich, dass P_1, P_2 zufrieden sind, aber P_3 nicht?
4. Ist es möglich, dass alle P_i zufrieden sind?

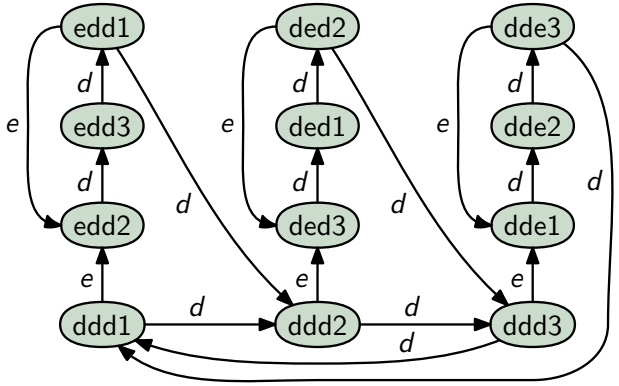
Frage 1



Ist es überhaupt möglich, dass das System beliebig lange läuft?

Ja: jeder Zustand hat mindestens einen Nachfolgerzustand.
$dddddd\ldots$ ist ein möglicher unendlicher Lauf.

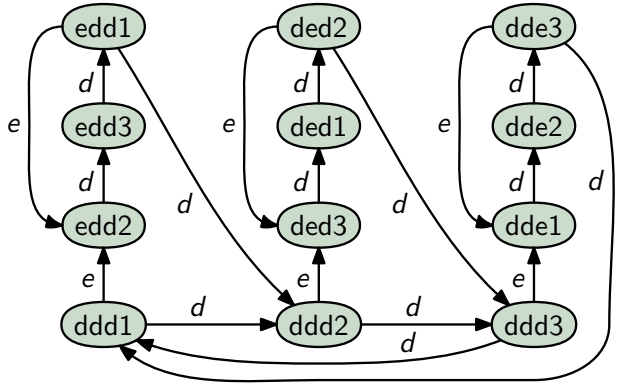
Frage 2



Ist es möglich, dass P_i zufrieden ist?

Ja: z. B. wenn ein Lauf ddd1 und edd1 unendlich oft durchläuft:
$ed^5ed^5\ldots$

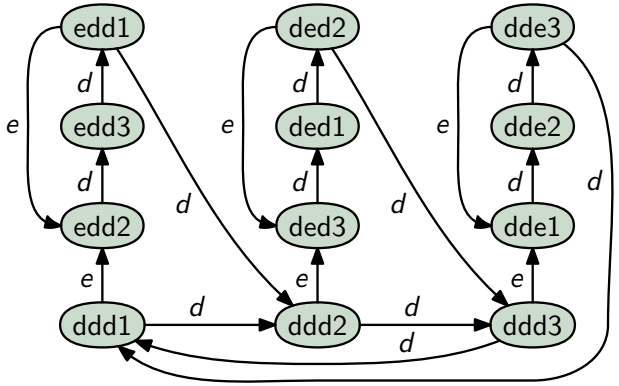
Frage 3



Ist es möglich, dass P_1, P_2 zufrieden sind, aber P_3 nicht?

Ja: z. B. ddd1, edd1, ddd2, ded2 unendlich oft, aber dde$i$ nicht:
$ed^3ed^4ed^3ed^4\ldots$

Frage 4



Ist es möglich, dass alle P_i zufrieden sind?

Ja: z. B. ddd1, edd1, ddd2, ded2, ddd3, dde3 unendlich oft:
$ed^3ed^3\ldots$ oder $ed^2ed^3ed^2ed^3\ldots$ oder $\ldots$

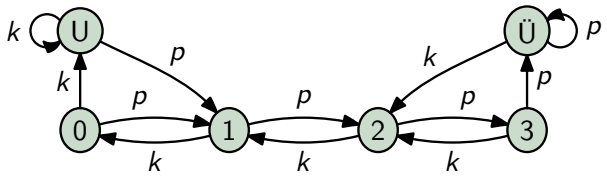
Beispiel 2: Konsument-Produzent-Problem

- P erzeugt Produkte und legt sie einzeln in einem Lager ab
- K entnimmt Produkte einzeln dem Lager
- Lager fasst maximal 3 Stück

Modellierung durch endliches Transitionssystem

- Zustände 0, 1, 2, 3, Ü, U
  - 0,1,2,3: im Lager liegen 0,1,2,3 Stück
  - *Ü*berschuss: P will ein Stück im vollen Lager ablegen
  - *U*nterversorgung: K will ein Stück aus leerem Lager nehmen
- Aktionen P, K (P legt ab oder K entnimmt)

Das Transitionssystem



Eingaben in das System: unendliche Zeichenketten über $\Sigma = \{p, k\}$

Zufriedenheit: P (K) möchte ...

- beliebig oft Produkte produzieren (konsumieren)
- nur endlich oft *Ü*berschuss (*U*nterversorgung) erleiden

Sequenz, die P und K zufrieden stellt:
$p^3k^3p^3k^3\ldots$ oder $ppkpkpk\ldots$ oder $\ldots$

Sequenz, die weder P noch K zufrieden stellt: $p^4k^4p^4k^4\ldots$

Und nun ...

Grundbegriffe

Unendliches Wort über **Alphabet** Σ

- ist Funktion $a : \mathbb{N} \to \Sigma$
- $a(n)$: Symbol an n-ter Stelle (auch: a_n)
- wird oft geschrieben als $a_0a_1a_2\ldots$
- $a[m, n]$: endliche Teilfolge $a_ma_{m+1}\ldots a_n$

Σ^ω: Menge aller unendlichen Zeichenketten

ω-Sprache: $L \subseteq \Sigma^\omega$

Büchi-Automaten

Definition 1

Ein **nichtdeterministischer Büchi-Automat (NBA)** über einem **Alphabet** Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine endliche nichtleere Menge von Zeichen ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überführungsrelation** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **Endzustände** ist.

... bisher kein Unterschied zu NEAs!

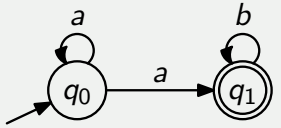
Berechnungen und Akzeptanz

Definition 2

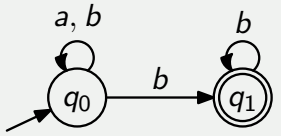
Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein Büchi-Automat.

- Ein **Run** von $\mathcal{A}$ auf $w = a_0 a_1 a_2 \ldots$ ist eine Folge
$$r = q_0 q_1 q_2 \ldots,$$
so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt: $(q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta$.
- **Unendlichkeitsmenge Inf(r)** von $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$:
Menge der Zustände, die unendlich oft in r vorkommen
- **Erfolgreicher Run** $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$: $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$
- $\mathcal{A}$ **akzeptiert** w,
wenn es einen erfolgreichen Run von $\mathcal{A}$ auf w gibt.
- Die von $\mathcal{A}$ **erkannte Sprache** ist
$L_\omega(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

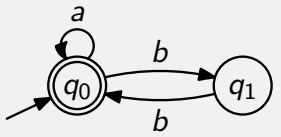
Beispiele

$\mathcal{A}_1$:


$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{a^n b^\omega \mid n \geqslant 1\}$

$\mathcal{A}_2$:


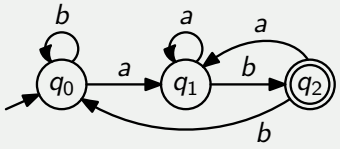
$L_\omega(\mathcal{A}_2) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \#_a(w) < \infty\}$

$\mathcal{A}_3$:


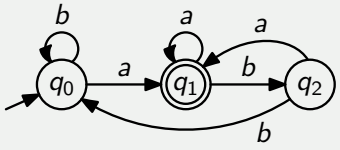
$L_\omega(\mathcal{A}_3) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \text{s. unten}\}$

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden a's in w
– und am Anfang von w – steht eine gerade Anzahl von b's.

Mehr Beispiele

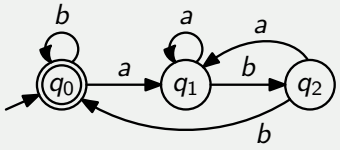
$\mathcal{A}_4$:


$L_\omega(\mathcal{A}_4) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \#_{ab}(w) = \infty\}$
$= \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \infty\}$

$\mathcal{A}_5$:


$L_\omega(\mathcal{A}_5) = \{w \mid \#_a(w) = \infty\}$

(Idee: q_1 kann nur erreicht werden, wenn ein a gelesen wird)

$\mathcal{A}_6$:


$L_\omega(\mathcal{A}_6) = \{w \mid \#_{bb}(w) = \infty\}$

(Idee: q_0 nur durch bb erreichbar; jeder Teilstring bb führt zu q_0)

Erkennbare Sprache

Definition 3

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist **Büchi-erkennbar**,
wenn es einen NBA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L_\omega(\mathcal{A})$.

Und nun ...

Zur Erinnerung

Die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter

- **Vereinigung**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Durchschnitt**, wenn gilt:
  Falls L_1, L_2 Büchi-erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Komplement**, wenn gilt:
  Falls L Büchi-erkennbar, so auch $\overline{L}$.

Quiz

Unter welchen Operationen gilt Abgeschlossenheit,
und wie leicht ist das zu zeigen?

Vereinigung?	✓	(leicht)
Durchschnitt?	✓	(mittel)
Komplement?	✓	(schwer)

Abgeschlossenheit

Satz 4

Die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

Beweis: Direkte Konsequenz aus den folgenden Lemmata. □

Abgeschlossenheit unter $^-$: siehe Abschnitt „Determinisierung“

Abgeschlossenheit unter Vereinigung

Lemma 5

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, I_i, F_i)$ für $i = 1, 2$.
O. B. d. A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
Konstruieren $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \Sigma, \Delta_3, I_3, F_3)$ wie folgt.

- *Idee wie für NEAs: vereinige $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$.*
- $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$
- $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$
- $I_3 = I_1 \cup I_2$
- $F_3 = F_1 \cup F_2$

Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$. □

Abgeschlossenheit unter Durchschnitt

Zur Erinnerung, für NEAs:

Gegeben $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, konstruiere $\mathcal{A}_3$ mit $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$:

- *Idee: lasse $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ „gleichzeitig“ auf Eingabewort laufen.*
- $Q_3 = Q_1 \times Q_2$
- $\Delta_3 = \{((p,p'),a,(q,q')) \mid (p,a,q) \in \Delta_1 \;\&\; (p',a,q') \in \Delta_2\}$
- $I_3 = I_1 \times I_2$
- $F_3 = F_1 \times F_2$

Funktioniert das auch für Büchi-Automaten?

Nein. Wir bekommen Probleme mit Erreichbarkeit.
Beispiel siehe Tafel. •

Abgeschlossenheit unter Durchschnitt

Lemma 6

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ NBAs über Σ.
Dann gibt es einen NBA $\mathcal{A}_3$ mit $L_\omega(\mathcal{A}_3) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Beweis: siehe Tafel •

Abgeschlossenheit unter Komplement

. . . siehe Abschnitt
„Deterministische Büchi-Automaten und Determinisierung“

Und nun . . .

Ziel

Ziel dieses Abschnitts

Charakterisierung der Büchi-erkennbaren Sprachen mittels regulärer Sprachen

Etwas Notation

Seien $W \subseteq \Sigma^*$ und $L \subseteq \Sigma^\omega$.

- $W^\omega = \{w_0 w_1 w_2 \cdots \mid w_i \in W \setminus \{\varepsilon\} \text{ für alle } i \geqslant 0\}$
  (ist ω-Sprache, weil ε ausgeschlossen wurde)
- $WL = \{wv \mid w \in W,\ v \in L\}$
  (ist ω-Sprache)

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (1)

Lemma 7

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gilt: W^ω ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \{q_0\}, F_1)$ ein NEA mit $L(\mathcal{A}_1) = W \setminus \{\varepsilon\}$.
- Idee: konstruiere NBA, der
  - $\mathcal{A}_1$ simuliert, bis ein Endzustand erreicht ist und
  - dann nichtdeterministisch entscheidet,
    ob die Simulation fortgesetzt wird
    oder eine neue Simulation von q_0 aus gestartet wird
- Details: siehe Tafel ● □

Von regulären zu Büchi-erkennbaren Sprachen (2)

Lemma 8

Für jede reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$
und jede Büchi-erkennbare Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ gilt:
WL ist Büchi-erkennbar.

Beweis:

Wie Abgeschlossenheit der reg. Sprachen unter Konkatenation. □

Satz von Büchi

Satz 9

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist Büchi-erkennbar genau dann,
wenn es reguläre Sprachen $V_1, W_1, \ldots, V_n, W_n$ gibt mit $n \geqslant 1$ und

$$L = V_1 W_1^\omega \cup \cdots \cup V_n W_n^\omega$$

Beweis:

Siehe Tafel. ● □

Konsequenz:

Büchi-erkennbare Sprachen durch **ω-reguläre Ausdrücke** darstellbar:

$$r_1 s_1^\omega + \cdots + r_n s_n^\omega ,$$

wobei r_i, s_i reguläre Ausdrücke sind

Und nun ...

Ziel dieses Abschnitts

Wollen zeigen:

- det. und nichtdet. Büchi-Automaten sind **nicht** gleichmächtig
  d. h.: es gibt ω-Sprachen, die von NBAs akzeptiert werden, aber nicht von DBAs
- Komplement-Abgeschlossenheit gilt trotzdem

Etwas Notation:

- **DBA:** NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit
  - $|I| = 1$
  - $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$
- Sei $W \subseteq \Sigma^*$.
  $\overrightarrow{W} = \{w \in \Sigma^\omega \mid w[0, n] \in W \text{ für unendlich viele } n\}$
  (d. h. w hat ∞ viele Präfixe in W)

  Beispiel: siehe Tafel ●

Zu Hilfe: Charakterisierung der DBA-erkennbaren Sprachen

Satz 10

Eine ω-Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist DBA-erkennbar genau dann, wenn es eine reguläre Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $L = \overrightarrow{W}$.

Beweis.

- Idee: sieh beliebigen D?A $\mathcal{A}$ gleichzeitig als DEA und DBA an.
  $\rightsquigarrow L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L(\mathcal{A})}$.
- Details: siehe Tafel. ● □

DBAs sind schwächer als NBAs

Satz 11

Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache, die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Beweis.

- Betrachte $L = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \#_a(w) \text{ ist endlich}\}$
- L ist Büchi-erkennbar: $L = \Sigma^*\{b\}^\omega$, wende Satz 9 an
- Annahme, L sei DBA-erkennbar.
  - $\Rightarrow$ Satz 10: $L = \overrightarrow{W}$ für eine reguläre Sprache W
  - $\Rightarrow$ Wegen $b^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1} \in W$
    Wegen $b^{n_1}ab^\omega \in L$ gibt es ein nichtleeres Wort $b^{n_1}ab^{n_2} \in W$
    $\vdots$
  - $\Rightarrow$ $w := b^{n_1}ab^{n_2}ab^{n_3}\ldots \in \overrightarrow{W}$ **Widerspruch:** $w \notin L$ □

Nebenprodukt des letzten Beweises

DBAs sind **nicht** unter Komplement abgeschlossen:

- $L = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid \#_a(w) \text{ ist endlich}\}$ wird von keinem DBA erkannt
- aber $\overline{L}$ wird von einem DBA erkannt (Ü)

Wie können wir trotzdem determinisieren?

Indem wir das Automatenmodell ändern!

Genauer: ändern die Akzeptanzbedingung

Zur Erinnerung

NBA ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit

- ...
- $F \subseteq Q$ (Menge der Endzustände)

Erfolgreicher Run: $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ mit $q_0 \in I$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ ein Zustand aus F kommt ∞ oft in r vor

(Julius Richard Büchi, 1924–1984, Logiker/Mathematiker; Zürich, Lafayette)

Muller-Automaten (David E. Muller, 1924–2008, Math./Inf.; Illinois)

Definition 12

Nichtdet. **Muller-Automat** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \underset{\sim}{\mathcal{F}})$ mit

- ...
- $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ (Kollektion von Endzustandsmengen)

Erfolgreicher Run $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ mit $q_0 \in I$ und $\underset{\sim}{\mathrm{Inf}(r) \in \mathcal{F}}$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Inf}(r)$ stimmt mit einer Menge aus $\mathcal{F}$ überein

Beispiel: Siehe Tafel •

Rabin-Automaten (Michael O. Rabin, *1931, Inf.; Jerusalem, Princeton, Harvard)

Definition 13

Nichtdet. **Rabin-Automat** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \underset{\sim}{\mathcal{P}})$ mit

- ...
- $\mathcal{P} = \{(E_1, F_1), \ldots, (E_n, F_n)\}$ mit $E_i, F_i \subseteq Q$ (Menge „akzeptierender Paare“)

Erfolgreicher Run $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ mit $q_0 \in I$ und

$\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathrm{Inf}(r) \cap E_i = \emptyset$ und $\mathrm{Inf}(r) \cap F_i \neq \emptyset$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ es gibt Paar (E_i, F_i), so dass

- **mindestens ein** Zustand aus F_i unendlich oft in r vorkommt &
- **alle** Zustände aus E_i nur endlich oft in r vorkommen **(Bsp. •)**

Streett-Automaten (Robert S. Streett, ?; Boston, Oakland)

Definition 14

Nichtdet. **Streett-Automat** ist 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \underset{\sim}{\mathcal{P}})$ mit

- ...
- $\mathcal{P} = \{(E_1, F_1), \ldots, (E_n, F_n)\}$ mit $E_i, F_i \subseteq Q$
  (Menge „fairer Paare“)

Erfolgreicher Run $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ mit $q_0 \in I$ und

$\underset{\sim}{\forall} i \in \{1, \ldots, n\}$: wenn $\mathrm{Inf}(r) \cap F_i \neq \emptyset$, dann $\mathrm{Inf}(r) \cap E_i \neq \emptyset$

Idee: r erfolgreich $\Leftrightarrow$ **für alle** Paare (E_i, F_i) gilt:

- **wenn** ein Zustand aus F_i unendlich oft in r vorkommt,
- **dann** kommt ein Zustand aus E_i unendlich oft in r vor **(Bsp. •)**

Gleichmächtigkeit der vier Automatenmodelle

Satz 15

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(B) *L ist Büchi-erkennbar.*
(M) *L ist Muller-erkennbar.*
(R) *L ist Rabin-erkennbar.*
(S) *L ist Streett-erkennbar.*

Beweis.

- (B), (R), (S) $\rightarrow$ (M):
  kodiere F bzw. $\mathcal{P}$ in $\mathcal{F}$ (s. Tafel) •
- (B) $\rightarrow$ (R), (S):
  ersetze F durch das Paar $(\emptyset, F)$ bzw. (F, Q) (s. Tafel) •
- (M) $\rightarrow$ (B):
  komplexere Transformation, benutzt Nichtdeterm. ↕ □

Von Muller- zu Büchi-Automaten

Lemma 16

Jede Muller-erkennbare Sprache ist Büchi-erkennbar.

Beweis.

- Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ ein Muller-Automat
- Dann ist $L_\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} L_\omega((Q, \Sigma, \Delta, I, \{F\}))$

$\rightsquigarrow$ Wegen $\cup$-Abgeschlossenheit: nehmen o. B. d. A. $\mathcal{F} = \{F\}$ an

- Konstruiere Büchi-Automaten $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I, F')$, der
  - $\mathcal{A}$ simuliert
  - einen Zeitpunkt rät,
    ab dem nur noch Zustände aus F vorkommen
  - ab dort sicherstellt, dass jedes q_i unendlich oft vorkommt
- Details: siehe Tafel • □

Gleichmächtigkeit der deterministischen Varianten

Definition 17 (Determinismus)

Ein Büchi-, Muller-, Rabin- oder Streett-Automat
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, Acc)$ ist **deterministisch**, wenn gilt:

- $|I| = 1$
- $\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\} = 1$ für alle $(q, a) \in Q \times \Sigma$

Zu Satz 15 analoge Aussage:

Satz 18

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(M) *L ist von einem deterministischen Muller-Autom. erkennbar.*
(R) *L ist von einem deterministischen Rabin-Autom. erkennbar.*
(S) *L ist von einem deterministischen Streett-Autom. erkennbar.*

Ohne Beweis (Variante des Beweises von Satz 15).

Abschlusseigenschaften

Zur Erinnerung

Satz 4

Die Menge der Büchi-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

Direkte Konsequenz

Folgerung 19

Die Menge der

- *Muller-erkennbaren Sprachen,*
- *Rabin-erkennbaren Sprachen,*
- *Streett-erkennbaren Sprachen*

ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup$ und $\cap$.

Zu Komplement-Abgeschlossenheit kommen wir jetzt.

Determinisierung von Büchi-Automaten

Zur Erinnerung: Satz 11

Es gibt eine Büchi-erkennbare Sprache,
die nicht durch einen DBA erkannt wird.

Ziel: Prozedur, um gegebenen NBA in äquivalenten deterministischen **Rabin**-Automaten umzuwandeln

$\rightsquigarrow$ wegen Satz 18 bekommt man daraus auch eine Umwandlung in einen äquiv. determ. Muller- bzw. Streett-Automaten

- Resultat geht auf McNaughton zurück
  (1965 von Robert McNaughton, ?, Phil./Inform.; Harvard, Rensselaer)
- Verwenden intuitiveren Beweis von Safra
  (1988 von Shmuel Safra, ?, Informatiker; Tel Aviv)

Potenzmengenkonstruktion versagt

Erster naheliegender Versuch:
NBA $\rightsquigarrow$ DBA mittels Potenzmengenkonstruktion **(PMK)**

- muss wegen Satz 11 fehlschlagen
- Beispiel: siehe Tafel •

Zweiter naheliegender Versuch:
NBA $\rightsquigarrow$ deterministischer X-Automat mittels PMK,
$X \in \{\text{Muller}, \text{Rabin}, \text{Streett}\}$

- schlägt auch fehl – Beispiel siehe Tafel •

Hauptproblem:

- Potenzautomat simuliert mehrere Runs gleichzeitig (wie Produktautomat)
- Endzustände müssen dabei nicht synchron erreicht werden

Safras Ideen informell dargestellt

- **Ziel:**
  NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F) \rightsquigarrow$ DRA $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P}^d)$
  mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}^d)$
- **Problem mit PMK:**
  bad runs von $\mathcal{A}^d$, die keinem erfolgr. Run von $\mathcal{A}$ entsprechen
- **Safras Tricks** erweitern die PMK und vermeiden das Problem

Etwas Notation

- **Makrozustände**: Zustände der alten PMK (Mengen $M \subseteq Q$)
- Zustände von $\mathcal{A}^d$:
  $\approx$ Bäume, deren Knoten mit Makrozuständen markiert sind

Safras Tricks

Beginne wie bei der PMK mit Knoten I

1. Von Makrozuständen mit Endzuständen, beginne neue Runs
   - erzeuge neues Kind mit Nachfolgezuständen aller Endzustände
   - wende zukünftig PMK auf jeden Knoten an
2. Erkenne zusammenlaufende Runs; lösche überflüssige Info
   - das beschränkt Weite eines Safra-Baums
   - „horizontal merge“
3. Gib überflüssige Makrozustände zur Löschung frei
   - wenn alle Kinder eines MZ M bezeugen, dass jeder Zustand in M einen Endzustand als Vorgänger hat, dann kann M gelöscht werden
   - „vertical merge“

Safra-Bäume

„Bausteine“:

- Q: Menge von Zuständen $\rightsquigarrow$ Makrozustände **MZ** $M \subseteq Q$
- V: Menge von Knotennamen

Safra-Baum über Q, V:

- geordneter Baum mit Knoten aus V
- jeder Knoten mit einem **nichtleeren** MZ markiert und möglicherweise auch mit $\textcircled{!}$
- Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:
  1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$
  2. M_i sind paarweise disjunkt

Safra-Bäume sind beschränkt

Zur Erinnerung

Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:

1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$
2. *M_i sind paarweise disjunkt*

Konsequenzen

- *wegen (1):* Höhe jedes SB ist durch $|Q|$ beschränkt
- *wegen (2):* Anzahl Kinder pro Knoten kleiner als $|Q|$
- *sogar:* Jeder SB über Q hat höchstens $|Q|$ Knoten (Beweis per Induktion über Baumhöhe)

Details der Konstruktion

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und $V = \{1, \ldots, 2|Q|\}$.
Konstruieren DRA $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$:

- Q^d = Menge aller Safra-Bäume über Q, V
- I^d = Safra-Baum mit einzigem Knoten I
- $\Delta^d = \{(S, a, S') \mid S'$ wird aus S wie folgt konstruiert$\}$

Konstruktion von S' aus S in 6 Schritten

Sei S Safra-Baum mit Knoten $V' \subseteq V$; sei $a \in \Sigma$

1. Beginne mit S; entferne alle Markierungen (!)
2. Für jeden Knoten v mit Makrozustand M und $M \cap F \neq \emptyset$, füge neues Kind $v' \in V \setminus V'$ mit Markierung $M \cap F$ hinzu (als **jüngstes** (rechtes) Geschwister aller evtl. vorhandenen Kinder)
3. Wende Potenzmengenkonstruktion auf alle Knoten v an: ersetze MZ M durch $\{q \in Q \mid (m, a, q) \in \Delta \text{ für ein } m \in M\}$
4. **Horizontales Zusammenfassen:** Für jeden Knoten v mit MZ M, lösche jeden Zustand q aus M, der im MZ eines älteren Geschwisters vorkommt
5. Entferne alle Knoten mit leeren MZen
6. **Vertikales Zusammenfassen:** Für jeden Knoten v, dessen Markierung nur Zustände aus v's Kindern enthält, lösche alle Nachfolger von v und markiere v mit (!)

Erläuterungen zur Konstruktion

- S' ist wieder ein Safra-Baum:

  Wenn Knoten v mit M und v's Kinder mit $M_1, \ldots, M_n$ markiert sind, dann:

  1. $M_1 \cup \cdots \cup M_n \subsetneq M$ — *"$\subseteq$": Schritte 2, 3; "$\neq$": Schritt 6*
  2. *M_i sind paarweise disjunkt* — *Schritt 4*

- Beispiel: siehe Tafel •

Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}^d$

$\mathcal{P} = \{(E_v, F_v) \mid v \in V\}$ mit

- E_v = alle Safra-Bäume ohne Knoten v
- F_v = alle Safra-Bäume, in denen v mit (!) markiert ist

$\rightsquigarrow$ d. h. Run $r = S_0 S_1 S_2 \ldots$ von $\mathcal{A}^d$ ist erfolgreich, wenn es einen Knotennamen v gibt, so dass

- alle S_i, bis auf endlich viele, einen Knoten v haben und
- unendlich oft auf v Schritt 6 angewendet wurde, d. h. vorher kamen alle Zustände in v's MZ in v's Kindern vor

Korrektheit der Konstruktion: Vorbereitung

Lemma 20 (Lemma von Kőnig)

Jeder unendliche Baum mit endlichem Verzweigungsgrad hat einen unendlichen Pfad.

- ohne Beweis
- endlicher Verzweigungsgrad: jeder Knoten hat endlich viele Kinder
- 1936 von Dénes Kőnig (1884–1944, Mathematiker, Budapest)

Korrektheit der Konstruktion

Korrektheit:
$\mathcal{A}^d$ akzeptiert nur Wörter, die $\mathcal{A}$ akzeptiert

Lemma 21

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.
Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}^d) \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis: siehe Tafel. • □

Vollständigkeit der Konstruktion

Vollständigkeit:
$\mathcal{A}^d$ akzeptiert (mindestens) alle Wörter, die $\mathcal{A}$ akzeptiert

Lemma 22

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NBA und sei $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, \mathcal{P})$ der DRA, den man nach Safras Konstruktion aus $\mathcal{A}$ erhält.
Dann gilt $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A}^d)$.

Beweis: siehe Tafel. • □

Konsequenz aus Safras Konstruktion

Satz 23 (Satz von McNaughton)

Sei $\mathcal{A}$ ein NBA. Dann gibt es einen DRA $\mathcal{A}^d$ mit $L_\omega(\mathcal{A}^d) = L_\omega(\mathcal{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemmas 21 und 22.

Folgerung 24

Die Klasse der Büchi-erkennbaren Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Über folgende Transformationskette:

NBA für L $\rightarrow$ DRA für L (gemäß Satz 23)
$\rightarrow$ DMA für L (gemäß Satz 18)
$\rightarrow$ DMA für $\overline{L}$ (wie gehabt)
$\rightarrow$ NBA für $\overline{L}$ (gemäß Satz 15) □

Anmerkungen zur Komplexität

Determinisierung NBA $\rightarrow$ DRA gemäß Safras Konstruktion

- liefert einen **exponentiell** größeren DRA
- genauer: wenn der NBA n Zustände hat,
  - gibt es 2^n Makrozustände
  - und $2^{O(n \log n)}$ Safrabäume
  - $\rightsquigarrow$ DRA hat $m := 2^{O(n \log n)}$ Zustände
- Das ist optimal (siehe Roggenbachs Kapitel in LNCS 2500)

Komplementierung beinhaltet auch den Schritt DMA $\rightarrow$ NBA

- liefert einen nochmal **exponentiell** größeren DBA
- genauer: wenn der DMA m Zustände hat,
  - hat der NBA $O(m \cdot 2^m)$ Zustände

$\rightsquigarrow$ Resultierender NBA hat $2^{2^{O(n^2)}}$ Zustände

- Alternative Prozedur erfordert nur $2^{O(n \log n)}$ Zustände

Und nun ...

Vorbetrachtungen

Betrachten 4 Standardprobleme:

- Leerheitsproblem
- Wortproblem (Wort ist durch NBA gegeben)
- Äquivalenzproblem
- Universalitätsproblem

Beschränken uns auf das **Leerheitsproblem** – die anderen ...

- lassen sich wie üblich darauf reduzieren
- aber teils mit (doppelt) exponentiellem „Blowup“ (Determinisierung, Komplementierung, siehe Folie 64)
  $\rightsquigarrow$ höhere, teils nicht optimale Komplexität

Beschränken uns auf **NBA**,
aber Entscheidbarkeit überträgt sich auf die anderen Modelle

Das Leerheitsproblem

Zur Erinnerung:

Gegeben: NBA $\mathcal{A}$

Frage: Gilt $L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Mengenschreibweise: $\{\text{NBA } \mathcal{A} \mid L_\omega(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 25

Das Leerheitsproblem für NBAs ist entscheidbar.

Beweis: siehe Tafel. •

Komplexität: **NL**-vollständig (Wegsuche in Graphen)

Und nun ...

Reaktive Systeme und Verifikation

Reaktive Systeme

- interagieren mit ihrer Umwelt
- terminieren oft nicht
- Beispiele:
  - Betriebssysteme, Bankautomaten, Flugsicherungssysteme, ...
  - s. a. Philosophenproblem, Konsument-Produzent-Problem

Verifikation = Prüfen von Eigenschaften eines Systems

- Eingabe-Ausgabe-Verhalten hat hier keine Bedeutung
- Andere Eigenschaften sind wichtig,
  z. B.: keine Verklemmung (deadlock) bei Nebenläufigkeit

Repräsentation eines Systems

Bestandteile

- **Variablen:** repräsentieren Werte, die zur Beschreibung des Systems notwendig sind
- **Zustände:** „Schnappschüsse“ des Systems
  Zustand enthält Variablenwerte zu einem bestimmten Zeitpunkt
- **Transitionen:** erlaubte Übergänge zwischen Zuständen

Pfad (Berechnung) in einem System:
unendliche Folge von Zuständen entlang der Transitionen

Transitionsgraph als Kripke-Struktur

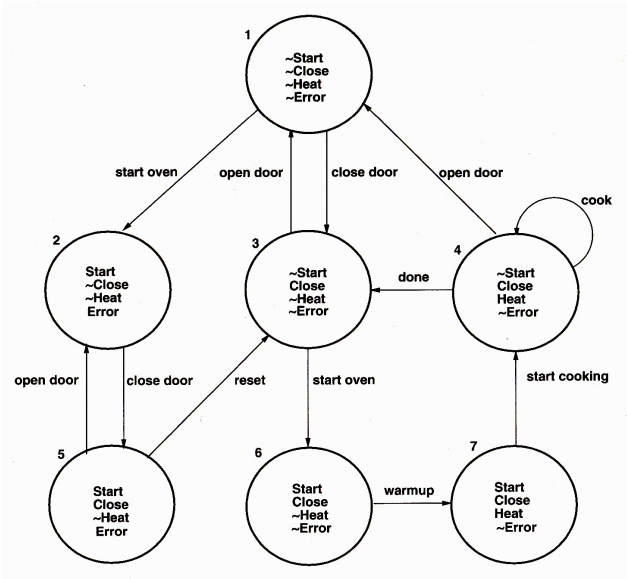
Definition 26

Sei AV eine Menge von Aussagenvariablen. Eine **Kripke-Struktur** $\mathcal{S}$ über AV ist ein Quadrupel $\mathcal{S} = (S, S_0, R, L)$, wobei

- S eine endliche nichtleere Menge von **Zuständen** ist,
- $S_0 \subseteq S$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $R \subseteq S \times S$ eine **Übergangsrelation** ist,
  die **total ist**: $\forall s \in S\ \exists s' \in S : sRs'$
- $L : S \to 2^{AV}$ eine Funktion ist, die jeden Zustand mit der Menge von Aussagenvariablen markiert, die dort wahr sind.

Ein **Pfad** in $\mathcal{S}$ ist eine endliche Folge $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ von Zuständen mit $s_0 \in S_0$ und $s_i R s_{i+1}$ für alle $i \geqslant 0$.

Beispiel 1: Mikrowelle



aus: E. M. Clarke et al., Model Checking, MIT Press 1999

Beispiel 2: nebenläufiges Programm

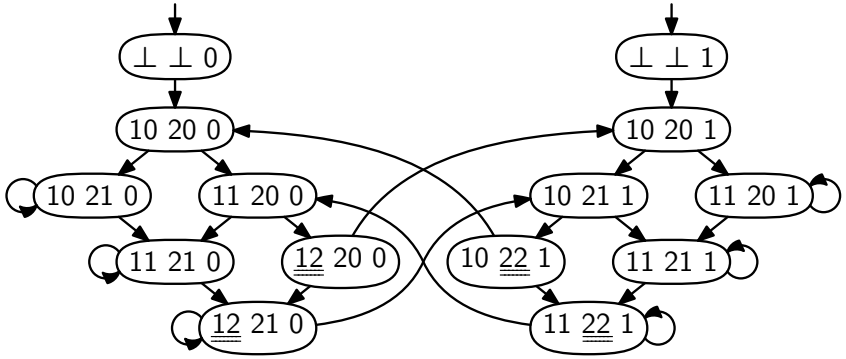
```
P    0   cobegin
     1     P0 || P1
     2   coend

P0   10  while(true) do
     11    wait(turn = 0)
     12    turn ← 1          kritischer Bereich
     13  end while

P1   20  while(true) do
     21    wait(turn = 1)
     22    turn ← 0          kritischer Bereich
     23  end while
```


Beispiel 2: nebenläufiges Programm

Variablen in der zugehörigen Kripke-Struktur: v_1, v_2, v_3 mit

- v_1, v_2: Werte der Programmzähler für P_0, P_1 (einschl. $\perp$: Teilprogramm ist nicht aktiv)
- v_3: Werte der gemeinsamen Variable turn

Kripke-Struktur:

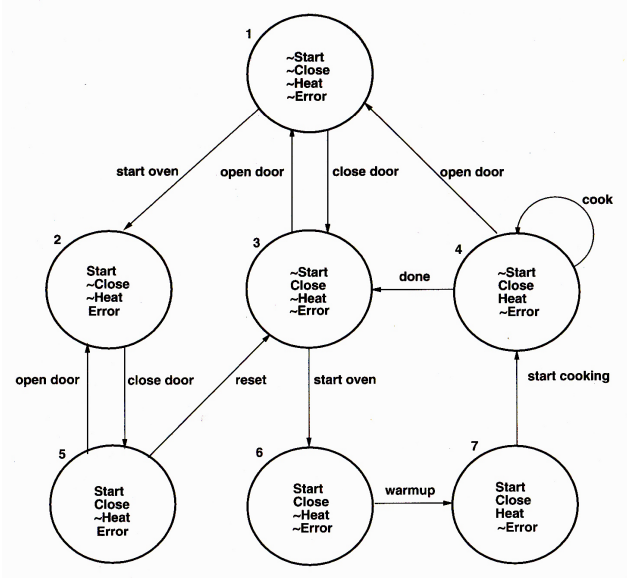


Spezifikationen

... sind Zusicherungen über die Eigenschaften eines Systems, z. B.:

- Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.
- Wenn die Mikrowelle gestartet wird, fängt sie immer nach endlicher Zeit an zu heizen.
- Wenn die Mikrowelle gestartet wird, ist es *möglich*, danach zu heizen.
- Es kommt nie vor, dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind.
- Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich.
- Jedes Teilprogramm *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich gelangen.
- ...

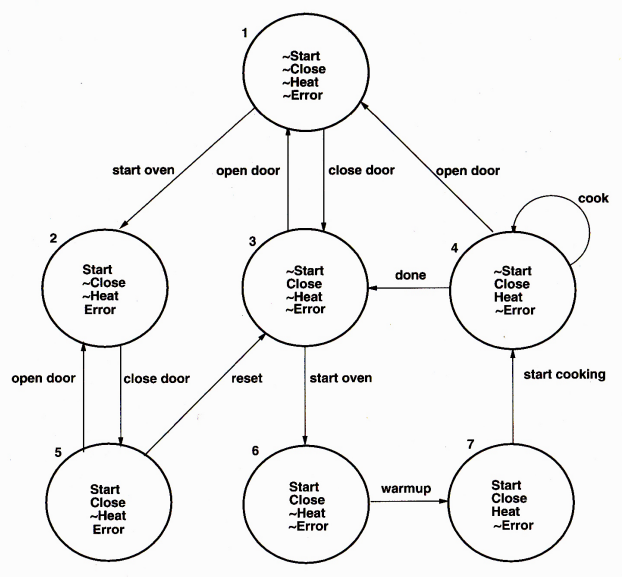
Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle



aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

„Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“ ✘

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle

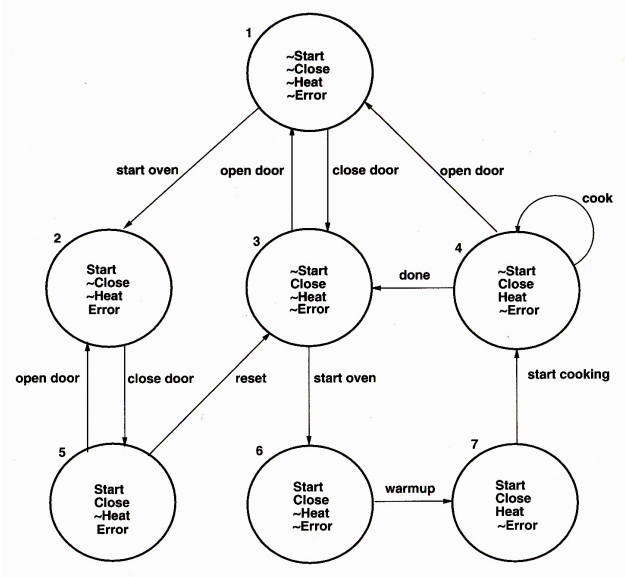


aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

„Wenn MW gestartet, beginnt sie immer nach endl. Zeit zu heizen.“ ✘

Bsp.e Büchi-Aut. Abschlusseig. Charakt. Determinismus Entscheidungsprobl. Model-Checking

Spezifikationen für das Beispiel Mikrowelle

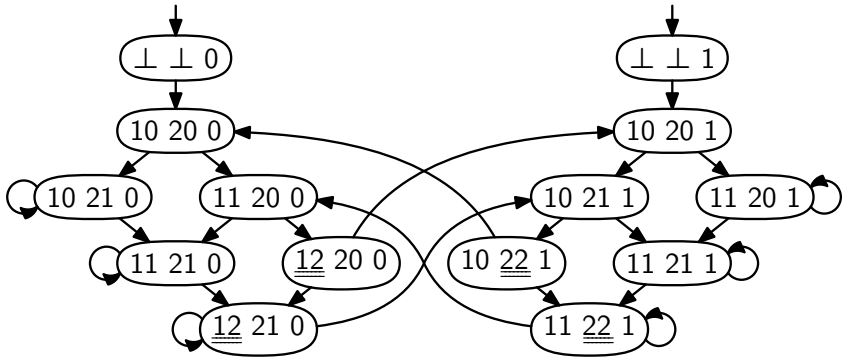


aus:
E. M. Clarke et al.,
Model Checking,
MIT Press 1999

„Wenn MW gestartet, ist es *möglich*, danach zu heizen.“ ✓

Bsp.e Büchi-Aut. Abschlusseig. Charakt. Determinismus Entscheidungsprobl. Model-Checking

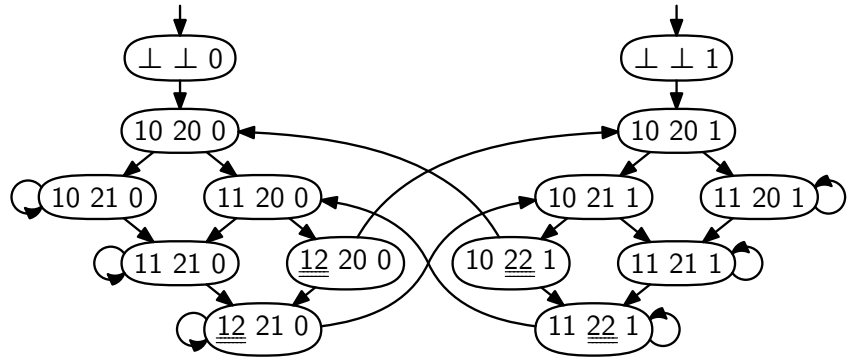
Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit



„Es kommt nie vor,
dass beide Teilprogramme zugleich im kritischen Bereich sind.“ ✓

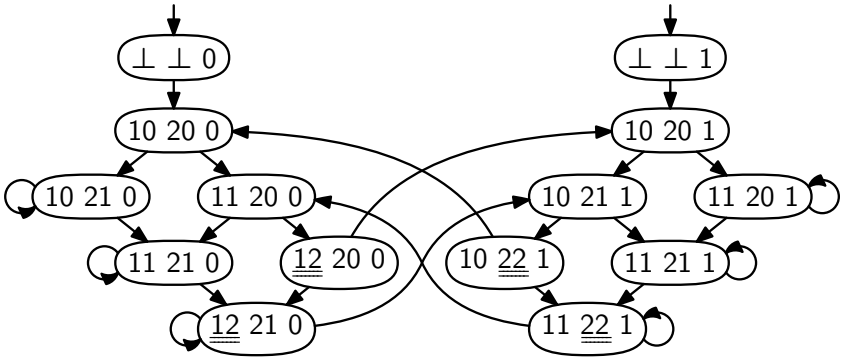
Bsp.e Büchi-Aut. Abschlusseig. Charakt. Determinismus Entscheidungsprobl. Model-Checking

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit



„Jedes P_i kommt beliebig oft in seinen kritischen Bereich.“ ✘

Spezifikationen für das Beispiel Nebenläufigkeit



„Jedes P_i *kann* beliebig oft in seinen kritischen Bereich kommen." ✓

Model-Checking

. . . beantwortet die Frage,
ob ein gegebenes System eine gegebene Spezifikation erfüllt

Definition 27 (Model-Checking-Problem MCP)

Gegeben ein System $\mathcal{S}$ und eine Spezifikation E,

- gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
  (universelle Variante)
- gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
  (existenzielle Variante)

Frage: Wie kann man Model-Checking

- exakt beschreiben und
- algorithmisch lösen?

Antwort: benutze Büchi-Automaten!

Vorgehen

- Stellen System $\mathcal{S}$ als NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ dar
  $\rightsquigarrow$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$
- Stellen Spezifikation E als NBA $\mathcal{A}_E$ dar
  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt die Pfade, die E erfüllen

$\rightsquigarrow$ Universelles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?"
Existenzielles MCP $=$ „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?"

Erweiterung (später)

- intuitivere Beschreibung von E mittels Temporallogik
- Umwandlung von Temporallogik-Formel φ_E in Automaten $\mathcal{A}_E$

Konstruktion des NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ für das System $\mathcal{S}$

Erinnerung: $\mathcal{S}$ gegeben als Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, L)$
(Zustände, Anfangszustände, Transitionen, Markierungen)

Zugehöriger Automat $\mathcal{A}_\mathcal{S} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$:

- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$
- $Q = S \uplus \{q_0\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = Q$
- $\Delta = \{ (q_0, L(s), s) \mid s \in S_0\}$
  $\cup \{ (s, L(s'), s') \mid (s, s') \in R\}$

Beispiel: siehe Tafel. •

Beschreibung von E durch NBA $\mathcal{A}_E$

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 72)

(a) Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben. ●

(b) Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen. ●

(c) Wenn die Mikrowelle gestartet wird,
ist es *möglich*, danach zu heizen. ●

Beispiel Nebenläufigkeit

(d) Es kommt nie vor,
dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind. ●

(e) Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich. ●

(f) Jedes Teilprogramm *kann* beliebig oft in seinen kritischen
Bereich gelangen. ●

Verifikation mittels der konstruierten NBAs

Gegeben sind wieder System $\mathcal{S}$ und Spezifikation E.

Universelles MCP

- Gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap \overline{L(\mathcal{A}_E)} = \emptyset$?

$\rightsquigarrow$ Komplementierung $\mathcal{A}_E$, Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **PSPACE** (expon. Explosion bei Komplementierung)

Existenzielles MCP

- Gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
- äquivalent: $L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) = \emptyset$?

$\rightsquigarrow$ Produktautomat, Leerheitsproblem

- Komplexität: **NL** (keine exponentielle Explosion)

Bemerkungen zur Implementierung

- effizienterer Algorithmus zur Lösung des Leerheitsproblems
- „On-the-fly model checking“
  - $|S|$ ist exponentiell in der Anzahl der Variablen
    State space explosion problem
  - Zustände von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ werden während des Leerheitstests
    nur bei Bedarf erzeugt

Spezifikationen mittels Linearer Temporallogik (LTL)

- intuitivere Beschreibung der Spezifikation E durch Formel φ_E
- Prozedur zur Umwandlung φ_E in $\mathcal{A}_E$
  (!) allerdings ist $|\mathcal{A}_E|$ exponentiell in $|\varphi_E|$
- dafür Explosion bei Komplementierung vermeiden:
  wandle $\neg\varphi_E$ in Automaten um

$\rightsquigarrow$ beide MCP für LTL sind **PSPACE**-vollständig

LTL im Überblick

LTL = Aussagenlogik + Operatoren, die über **Pfade** sprechen:

F (Future)

$F\varphi$ bedeutet „φ ist irgendwann in der Zukunft wahr“

G (Global)

$G\varphi$ bedeutet „φ ist ab jetzt immer wahr“

X (ne$X$t)

$X\varphi$ bedeutet „φ ist im nächsten Zeitpunkt wahr“

U: (Until)

$\varphi U \psi$ bedeutet „ψ ist irgendwann in der Zukunft wahr und bis dahin ist immer φ wahr“

LTL-Syntax

Sei **PROP** abzählbare Menge von **Aussagenvariablen**.

Definition 28 (LTL-Formeln)

- Jede Aussagenvariable $p \in$ PROP ist eine LTL-Formel.
- Wenn φ und ψ LTL-Formeln sind, dann sind die folgenden auch LTL-Formeln.
  - $\neg\varphi$ „nicht φ“
  - $\varphi \wedge \psi$ „φ und ψ“
  - $F\varphi$ „in Zukunft irgendwann φ“
  - $G\varphi$ „in Zukunft immer φ“
  - $X\varphi$ „im nächsten Zeitpunkt φ“
  - $\varphi\, U\, \psi$ „in Zukunft irgendwann ψ; bis dahin immer φ“

Verwenden die üblichen Abkürzungen $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Mikrowelle (siehe Bild auf Folie 72)

- „Wenn ein Fehler auftritt, ist er nach endlicher Zeit behoben.“
  $G(e \rightarrow F\neg e)$ ($e \in$ PROP steht für „Error“)
- „Wenn die Mikrowelle gestartet wird, fängt sie nach endlicher Zeit an zu heizen.“
  $G(s \rightarrow Fh)$ ($s, h \in$ PROP stehen für „Start“ bzw. „Heat“)
- „Irgendwann ist für genau einen Zeitpunkt die Tür geöffnet.“
  $F(c \wedge X(\neg c \wedge Xc))$ ($c \in$ PROP steht für „Close“)
- „Irgendwann ist für genau einen Zeitpunkt die Tür geöffnet, und bis dahin ist sie geschlossen.“
  $c\, U\, (\neg c \wedge Xc)$

Beispiel-Spezifikationen als LTL-Formeln

Beispiel Nebenläufigkeit

- Es kommt nie vor, dass beide Teilprog. zugleich im kritischen Bereich sind.
  $G\neg(p_{12} \wedge p_{22})$ ($p_i \in$ PROP stehen für „Programmzähler in Zeile i“)
- Jedes Teilprog. kommt beliebig oft in seinen krit. Bereich.
  $GFp_{12} \wedge GFp_{22}$

LTL-Semantik

Pfad: Abbildung $s : \mathbb{N} \to 2^{\text{PROP}}$
schreiben $s_0 s_1 s_2 \ldots$ statt $s(0)s(1)s(2)\ldots$

Definition 29

Sei φ eine LTL-Formel, s ein Pfad und $i \in \mathbb{N}$.
Das **Erfülltsein** von φ in s, i ($s, i \models \varphi$) ist wie folgt definiert.

- $s, i \models p$, falls $p \in s_i$, für alle $p \in \text{PROP}$
- $s, i \models \neg\psi$, falls $s, i \not\models \psi$
- $s, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $s, i \models \varphi$ und $s, i \models \psi$
- $s, i \models F\varphi$, falls $s, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $s, i \models G\varphi$, falls $s, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$
- $s, i \models X\varphi$, falls $s, i+1 \models \varphi$
- $s, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
  und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

Beispiele

- $s, i \models p$, falls $p \in s_i$, für alle $p \in \text{PROP}$
- $s, i \models \neg\psi$, falls $s, i \not\models \psi$
- $s, i \models \varphi \wedge \psi$, falls $s, i \models \varphi$ und $s, i \models \psi$
- $s, i \models F\varphi$, falls $s, j \models \varphi$ für ein $j \geqslant i$
- $s, i \models G\varphi$, falls $s, j \models \varphi$ für alle $j \geqslant i$
- $s, i \models X\varphi$, falls $s, i+1 \models \varphi$
- $s, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
  und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

Siehe Tafel. ●

Model-Checking mit LTL-Formeln

Zur Erinnerung:

Definition 27: Model-Checking-Problem MCP

Gegeben ein System $\mathcal{S}$ und eine Spezifikation E,

- gilt E für jeden Pfad in $\mathcal{S}$?
  (universelle Variante)
- gibt es einen Pfad in $\mathcal{S}$, der E erfüllt?
  (existenzielle Variante)

Model-Checking mit LTL-Formeln

Für LTL:

(jedem Pfad $s_0 s_1 s_2 \ldots$ in einer Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, L)$ entspricht ein LTL-Pfad $s'_0 s'_1 s'_2 \ldots$ mit $s'_i = L(s_i)$)

Definition 30 (Model-Checking-Problem)

Gegeben Kripke-Struktur $\mathcal{S} = (S, S_0, R, L)$ und LTL-Formel φ,

- gilt $s, 0 \models \varphi$ für alle Pfade s, die in einem $s_0 \in S_0$ starten?
  (universelle Variante)
- gibt es Pfad s, der in einem $s_0 \in S_0$ startet, mit $s, 0 \models \varphi$?
  (existenzielle Variante)

✓ Exakte Beschreibung des Model-Checking-Problems

▶ Algorithmische Lösung?

MCP weiterhin mittels Büchi-Automaten lösen!

Vorgehen wie gehabt:

- Wandle Kripke-Struktur $\mathcal{S}$ in NBA $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ um
  $\leadsto$ Pfade in $\mathcal{S}$ sind erfolgreiche Runs von $\mathcal{A}_\mathcal{S}$
- Wandeln LTL-Formel φ_E in NBA $\mathcal{A}_E$ um
  $\leadsto$ $\mathcal{A}_E$ beschreibt Pfade, die E erfüllen

$\leadsto$ Universelles MCP = „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \subseteq L(\mathcal{A}_E)$?“
Existenzielles MCP = „$L(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{A}_E) \neq \emptyset$?“

Frage: Wie wandeln wir φ_E in $\mathcal{A}_E$ um?

Umwandlung von LTL-Formeln in Automaten (Überblick)

- Wandeln φ_E in **verallgemeinerten Büchi-Automaten (GNBA)** um
  - $\mathcal{A}_{\varphi_E} = (Q, \Sigma, \Delta, I, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$
  - $r = q_0 q_1 q_2 \ldots$ ist erfolgreich: $\mathrm{Inf}(r) \cap F \neq \emptyset$ für *alle* $F \in \mathcal{F}$
  - GNBAs und NBAs sind äquivalent
- Im Folgenden grobe Vorgehensweise

Vorbetrachtungen

- Genügt, die Operatoren $\neg, \wedge, X, U$ zu betrachten
  (die anderen kann man mit diesen ausdrücken)
- Sei $\mathrm{cl}(\varphi_E)$ die Menge aller Teilformeln von φ_E
  und derer Negationen
- $\Sigma = 2^{\mathrm{PROP}}$

Intuitionen

Erweiterung von Pfaden

- Betrachten Pfade $s = s_0 s_1 s_2 \ldots$ mit $s_i \subseteq \mathrm{PROP}$
- Erweitern jedes s_i mit den $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$, für die $s, i \models \psi$ gilt
- Resultat: Folge $\overline{s} = t_0 t_1 t_2 \ldots$ mit $t_i \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$

Bestandteile des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

- Zustände: $\approx t_i$
- $\overline{s} = t_0 t_1 t_2 \ldots$ wird ein Run von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$ für $s_0 s_1 s_2 \ldots$ sein
- Run $\overline{s}$ wird erfolgreich sein gdw. $s, 0 \models \varphi_E$
- Kodieren Bedeutung der logischen Operatoren in
  - Zuständen ($\neg$, $\wedge$, teilweise U)
  - Überführungsrelation (X, teilweise U)
  - Akzeptanzbedingung (teilweise U)

Zustandsmenge des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

Q = Menge aller **elementaren** Formelmengen $t \subseteq \mathrm{cl}(\varphi_E)$:

1. t ist **konsistent** bzgl. Aussagenlogik, d. h.
   für alle $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$ und $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - $\psi_1 \wedge \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_1 \in t$ und $\psi_2 \in t$
   - wenn $\psi \in t$, dann $\neg\psi \notin t$
2. t ist **lokal konsistent** bzgl. des U-Operators, d. h.
   für alle $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   - wenn $\psi_2 \in t$, dann $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$
   - wenn $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$ und $\psi_2 \notin t$, dann $\psi_1 \in t$
3. t ist **maximal**, d. h. für alle $\psi \in \mathrm{cl}(\varphi_E)$:
   wenn $\psi \notin t$, dann $\neg\psi \in t$

Beispiel: $a \; U \; (\neg a \wedge b)$, siehe Tafel

Überführungsrelation des GNBA $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

- Betrachten Tripel (t, s, t')
  mit $t, t' \in Q$ (elem. FM) und $s \in \Sigma$ ($\Sigma = 2^{\text{PROP}}$)
- $(t, s, t') \in \Delta$ wenn
  - $s = t \cap \text{PROP}$
  - für alle $X\psi \in \text{cl}(\varphi_E)$: $X\psi \in t$ gdw. $\psi \in t'$
  - für alle $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in \text{cl}(\varphi_E)$:
    $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t$ gdw. $\psi_2 \in t$ oder ($\psi_1 \in t$ und $\psi_1 \; U \; \psi_2 \in t'$)
    ("Aufschieben" von $\psi_1 \; U \; \psi_2$)

Anfangszustände und Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}_{\varphi_E}$

- $I = \{t \in Q \mid \varphi_E \in t\}$
- $\mathcal{F} = \{M_{\psi_1 U \psi_2} \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \in \text{cl}(\varphi_E)\}$ mit

$$M_{\psi_1 U \psi_2} = \{t \in Q \mid \psi_1 \; U \; \psi_2 \notin t \text{ oder } \psi_2 \in t\}$$

Intuition:

Ein $t \in M_{\psi_1 U \psi_2}$ kommt unendlich oft vor
gdw.
$\psi_1 \; U \; \psi_2$ wird immer nur höchstens endlich lange "aufgeschoben"

Beispiel: Xa, siehe Tafel •

Beispiel: aUb, siehe Übung

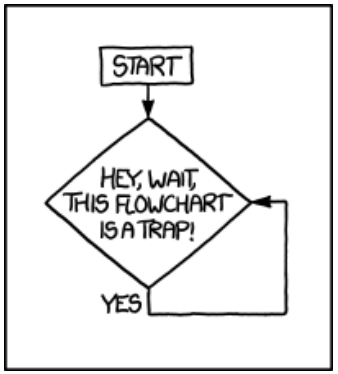
Abschließende Betrachtungen

- $|Q|$ ist exponentiell in $|\varphi_E|$
- Dafür beim universellen MCP auf Komplementierung $\mathcal{A}_{\varphi_E}$ verzichten:
  Wandle $\neg\varphi_E$ in Automaten um

$\rightsquigarrow$ beide MCP-Varianten in PSPACE

- beide MCP-Varianten sind PSPACE-vollständig

Damit sind wir am Ende dieses Kapitels.



Quelle: http://xkcd.com/1195 (Lizenz CC BY-NC 2.5)

Vielen Dank.

Literatur für diesen Teil (1)

Wolfgang Thomas.

Automata on Infinite Objects.

In J. van Leeuwen (Hrsg.):
Handbook of Theoretical Computer Science.
Volume B: Formal Models and Sematics.

Elsevier, 1990, S. 133–192.

SUB, Zentrale: `a inf 400 ad/465-2`

Wolfgang Thomas.

Languages, automata, and logic.

In G. Rozenberg and A. Salomaa (Hrsg.:)
Handbook of Formal Languages. Volume 3: Beyond Words.

Springer, 1997, S. 389–455.

SUB, Zentrale: `a inf 330/168-3`

Literatur für diesen Teil (2)

Markus Roggenbach.

Determinization of Büchi Automata.

In E. Grädel, W. Thomas, T. Wilke (Hrsg.):
Automata, Logics, and Infinite Games.

LNCS 2500, Springer, 2002, S. 43–60.

Erklärt anschaulich Safras Konstruktion.
`http://www.cs.tau.ac.il/~rabinoa/Lncs2500.zip`

Auch erhältlich auf Anfrage in der BB Mathematik im MZH:
`19h inf 001 k/100-2500`

Meghyn Bienvenu.

Automata on Infinite Words and Trees.

Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10. Kapitel 2.

`http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf`

Literatur für diesen Teil (3)

Christel Baier, Joost-Pieter Katoen.

Principles of Model Checking.

MIT Press 2008.

Abschnitt 4.3 „Automata on Infinite Words“
Abschnitt 5.2 „Automata-Based LTL Model Checking“

SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/782`, `a inf 440 ver/782a`

Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron A. Peled.

Model Checking.

MIT Press 1999.

Abschnitt 2 „Modeling Systems“ bis Mitte S. 14,
Abschnitt 2.2.3+2.3 „Concurrent Programs“ und „Example . . . “,
Abschnitt 3 „Temporal Logics“,
Abschnitt 9.1 „Automata on Finite and Infinite Words“.

SUB, Zentrale: `a inf 440 ver/780(6)`, `a inf 440 ver/780(6)a`