Prof. Carsten Lutz/Dr. Stefan Göller | Sommersemester 2013

# Theoretische Informatik 2

## Ungewertete Aufgaben, Blatt 3

*Besprechung: In Ihrer Übung in KW 20*

---

**1.** Für diese Aufgabe dürfen die in der Vorlesung eingeführten Konstrukte und LOOP-berechenbaren Funktionen dürfen verwendet werden. Man gebe für folgende Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jeweils **LOOP**-Programme an, die $f$ berechnen:

a) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$.

b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \max(x, y)$.

c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \mathrm{ggT}(x, y)$.

**2.** Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist folgendermaßen definiert:

- $A(0, y) = y + 1$,
- $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$ und
- $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ eine Funktion $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an mit $f_i(n) = A(i, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Machen Sie sich das Wachstum für $i = 4$ klar.

**3.** GOTO-*Programme* bestehen aus Sequenzen von *Anweisungen* $A_i$, die jeweils durch eine *Marke* $M_i$ eingeleitet werden, also Sequenzen der Art

$$M_1 : A_1;\ M_2 : A_2;\ \ldots; M_k : A_k,$$

wobei mögliche Anweisungen $A_i$ einer der folgenden Gestalt sind:

- *Wertzuweisung, Addition:* $x_i := x_j + c$ für $c \in \mathbb{N}$
- *Wertzuweisung, Subtraktion:* $x_i := x_j \dot{-} c$ für $c \in \mathbb{N}$
- *Unbedingter Sprung:* GOTO $M_i$
- *Bedinger Sprung:* `IF` $x_i = x$ `THEN` GOTO $M_i$
- *Stopanweisung:* `HALT`

Wir nennen eine Funktion GOTO-*berechenbar*, wenn es ein GOTO-Programm gibt, die diese Funktion berechnet.

Zeigen Sie, dass

a) jede WHILE-berechenbare Funktion GOTO-berechenbar ist und dass

b) jede GOTO-berechenbare Funktion WHILE-berechenbar ist.

**4.** Sie dürfen für diese Aufgabe die in der Vorlesung als primitiv rekursiv nachgewiesenen Funktionen benutzen. Zeigen Sie von den folgenden Funktionen, dass sie primitiv rekursiv sind:

a) $\exp : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\exp(x) = 2^x$.

b) $\mathrm{sgn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

c) $\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{pred}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

d) $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $c(x, y) = 2^x \cdot (2y + 1) \dot{-} 1$