Dr. Thomas Schneider
http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ss13/automaten SS 2013

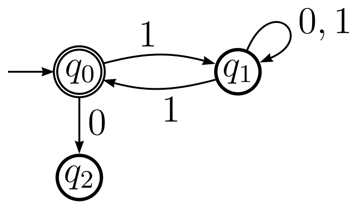
Automatentheorie und ihre Anwendungen

Übungsblatt 6

Abgabe am 26. 6. zu Beginn der Übung

---

1. (30 %) Wende die Konstruktion von Safra schrittweise auf den nebenstehenden Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an. Begründe, dass der entstandene Rabin-Automat dieselbe Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt.



2. (35 %) Betrachte folgenden Ansatz für eine Prozedur zum Determinisieren von Büchi-Automaten:

Die Grundidee ist, wie in der ursprünglichen Potenzmengenkonstruktion sowohl die Menge der erreichbaren Zustände zu „speichern“ sowie zusätzlich die Menge der Zustände, die seit dem letzten Zurücksetzen (Löschen der Markierung $\textcircled{!}$) erreicht werden. Dann ist ein Run erfolgreich, wenn auf ihm unendlich oft zurückgesetzt wird. Dies kann man als eine Vereinfachung von Safras Konstruktion ansehen, bei der es nur eine einzige Ebene unterhalb der Wurzel und dort nur maximal ein Kind gibt.

Genauer: gegeben einen NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, konstruiere den DBA $\mathcal{A} = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ mit

- $Q' = \{(X, Y, m) \mid Y \subseteq X \subseteq Q,\ m \in \{\textcircled{!}, \bigcirc\}$
- $I' = \{(I, \emptyset, \bigcirc)\}$
- $F' = \{(X, \emptyset, \textcircled{!}) \mid X \subseteq Q\}$
- $\big((X, Y, m), a, (X', Y', m')\big) \in \Delta'$ genau dann, wenn man (X', Y', m') mit der folgenden Konstruktion aus (X, Y, m) erhält.
  (1) Setze $m = \bigcirc$.
  (2) Füge $X \cap F$ zur Menge Y hinzu.
  (3) Wende die originale Potenzmengenkonstruktion auf X und Y an.
  (4) Wenn $X = Y \neq \emptyset$, dann setze $Y = \emptyset$ und $m = \textcircled{!}$.

Zeige, dass diese Konstruktion *korrekt* ist (d. h. keine „schlechten“ Wörter werden akzeptiert), aber nicht *vollständig* (d. h. mindestens ein „gutes“ Wort wird möglicherweise nicht akzeptiert):

a) Gib einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an mit $L_\omega(\mathcal{A}) \not\subseteq L_\omega(\mathcal{A}')$.

b) Zeige, dass für alle Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

3. (35 %) Betrachte die folgende Verfeinerung des Ansatzes aus Aufgabe 2, die versucht, Vollständigkeit herzustellen.

Die Grundidee ist, die Konstruktion zu iterieren: jetzt gibt es mehrere Ebenen, aber immer noch ein Kind pro Ebene. Ein Run ist erfolgreich, wenn es eine Ebene k gibt, die bis auf endlich viele Ausnahmen immer ein Kind enthält und dieses Kind unendlich oft zurückgesetzt wird.

Genauer: gegeben einen NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, konstruiere den DRA $\mathcal{A} = (Q', \Sigma, \Delta', I', \mathcal{P})$, wobei

- Q' die Menge aller Tupel $(X_1, \dots, X_n, m)$ ist mit
  - $n = |Q| + 1$
  - $X_n \subseteq \dots X_1 \subseteq Q$
  - wenn $X_{k+1} \neq \emptyset$, dann $X_{k+1} \subsetneq X_k$
  - $m : \{1, \dots, n\} \to \{!, \bigcirc\}$ gibt an, welche Ebenen markiert sind.
- $I' = \{(I, \emptyset, \dots, \emptyset, m\}$ mit $m(k) = \bigcirc$ für alle Ebenen k
- $\mathcal{P} = \{(E_1, F_1), \dots, (E_n, F_n)\}$ mit

$$E_k = \{(X_1, \dots, X_n, m) \mid X_k = \emptyset\}$$
$$F_k = \{(X_1, \dots, X_i, \emptyset, \dots, \emptyset, m) \mid m(k) = !\}$$

- $\big((X_1, \dots, X_n, m), a, (X'_1, \dots, X'_n, m')\big) \in \Delta'$ genau dann, wenn man $(X'_1, \dots, X'_n, m')$ mit der folgenden Konstruktion aus $(X_1, \dots, X_n, m)$ erhält.
  1. Setze $m(k) = \bigcirc$ für alle k.
  2. Für alle $k < n$, füge $X_k \cap F$ zur Menge X_{k+1} hinzu.
  3. Wende die originale Potenzmengenkonstruktion auf alle X_k an.
  4. Wenn $X_k = X_{k+1} \neq \emptyset$ für ein k und wenn k minimal mit dieser Eigenschaft ist, dann setze $X_j = \emptyset$ für alle $j \geqslant k+1$ und $m(k) = !$.

Zeige, dass diese Konstruktion vollständig, aber nicht korrekt ist:

a) Zeige, dass für den NBA $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a, b\},\ \Delta,\ \{q_0\},\ \{q_1, q_2\})$ mit $\Delta = \{(q_0, a, q_0),\ (q_0, b, q_0),\ (q_0, b, q_1),\ (q_0, a, q_2),\ (q_1, a, q_2),\ (q_2, b, q_2)\}$ gilt, dass $L_\omega(\mathcal{A}') \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

b) Zeige, dass für alle Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gilt: $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A}')$.