Dr. Thomas Schneider
http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ss13/automaten SS 2013

# Automatentheorie und ihre Anwendungen
## Übungsblatt 5

Abgabe am 12. 6. zu Beginn der Übung

---

**1.** (25 %) Seien $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ ein Alphabet und $L$ eine Büchi-erkennbare Sprache über $\Sigma$. Zeige, dass die folgenden Sprachen Büchi-erkennbar sind.

$$\mathsf{Proj}_1(L) = \{a_0a_1a_2 \ldots \in \Sigma_1^\omega \mid \exists b_0b_1b_2 \ldots \in \Sigma_2^\omega : (a_0, b_0)(a_1, b_1)(a_2, b_2) \ldots \in L\}$$
$$\mathsf{Proj}_2(L) = \{b_0b_1b_2 \ldots \in \Sigma_2^\omega \mid \exists a_0a_1a_2 \ldots \in \Sigma_1^\omega : (a_0, b_0)(a_1, b_1)(a_2, b_2) \ldots \in L\}$$

**2.** (25 %) Sei $\Sigma$ ein Alphabet. Gegeben ist die Funktion $\mathsf{select} : \Sigma \times \Sigma \times \{1, 2\}$ mit

$$\mathsf{select}(a, b, 1) = a \qquad \text{und} \qquad \mathsf{select}(a, b, 2) = b.$$

Sei $\mathsf{Select}$ eine Büchi-erkennbare Sprache über dem Alphabet $\{1, 2\}$, und seien $L_1, L_2$ Büchi-erkennbare Sprachen über $\Sigma$. Zeige, dass die folgende Sprache Büchi-erkennbar ist.

$$\mathsf{Fusion} = \{w \in \Sigma^\omega \mid \text{es gibt } u \in L_1 \text{ und } v \in L_2 \text{ und } s \in \mathsf{Select} \text{ mit } w[i] = \mathsf{select}(u[i], v[i], s[i])\ \}$$

Dabei bezeichnet $s[i], u[i], v[i]$ bzw. $w[i]$ den Buchstaben an Position $i$ in $s, u, v$ bzw. $w$.

**3.** (30 %) Konstruiere Müller-, Rabin- und Streett-Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die die folgenden Sprachen erkennen.

a) $\{w \mid 0 \text{ kommt in } w \text{ genau zwei Mal vor}\}$

b) $\{w \mid \text{jede } 0 \text{ in } w \text{ wird direkt von } 11 \text{ gefolgt}\}$

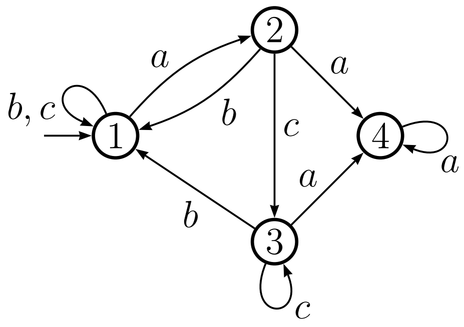
c) $\{w \mid w \text{ enthält endlich oft } 1\}$

d) $\{w \mid w \text{ enthält endlich viele Teilwörter } 11\}$

e) $\{w \mid w = 1^\omega \text{ oder } w \text{ enthält unendlich oft } 0 \text{ und unendlich oft } 1\}$

Bitte wenden.

4. (20 %) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ die Müller-Automaten, deren Zustände und Überführungen im unten stehenden Bild angegeben sind, und deren Akzeptanzbedingungen wie folgt definiert sind: $\mathcal{F}_1 = \{\{2,3\}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\{1\},\{1,4\}\}$, $\mathcal{F}_3 = \{\{3\},\{1,2\}\}$ und $\mathcal{F}_4 = \{\{1,2,3\}\}$. Bestimme die Sprachen $L_\omega(\mathcal{A}_1), L_\omega(\mathcal{A}_2), L_\omega(\mathcal{A}_3), L_\omega(\mathcal{A}_4)$.




Die Sprachen dürfen als (möglichst einfache) $\omega$-reguläre Ausdrücke angegeben werden, also z. B. $(aa+bb)^*(ab)^\omega$, und das Ergebnis sollte kurz begründet werden.

5. (Zusatzaufgabe, bis zu 15 %) Beweise, dass jede Müller-erkennbare Sprache eine Boolesche Kombination (Vereinigung, Schnitt, Komplement) von endlich vielen $\omega$-Sprachen $\overrightarrow{W_i}$ ist, wobei jedes $W_i$ eine reguläre Sprache ist.