Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: ABoxen und Anfragebeantwortung
- Kapitel 7: Effiziente Beschreibungslogiken

Ausdrucksstärke
und Modellkonstruktionen

Ziel des Kapitels

Die wichtigsten Eigenschaften einer BL sind

- Ausdrucksstärke und
- Komplexität

Die Aussdrucksstärke kann man nicht linear quantifizieren, sondern nur beschreiben und charakterisieren.

Wir

- etablieren mehrere Konstruktionen auf Modellen und
- verwenden diese, um die Aussdrucksstärke von BLen zu studieren.

Ausdrucksstärke
und Modellkonstruktionen

Bisimulation

Überblick

- Bisimulation ist graphentheoretischer Begriff
  beschreibt die “Ähnlichkeit” von Graphen

- Hängt eng zusammen mit der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$

- Wir formalisieren den Zusammenhang, betrachten zwei Anwendungen:

  - Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften

  - Baummodelleigenschaft

Bisimulation

Definition 3.1 (Bisimulation)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist *Bisimulation* zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ wenn

1. $d_1 \; \rho \; d_2$ impliziert dass $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$, für alle $A \in \mathsf{N_C}$
2. $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_1}$, für alle $r \in \mathsf{N_R}$
3. $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$ impliziert die Existenz eines $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_2}$, für alle $r \in \mathsf{N_R}$

T3.1

Bisimulation

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$: es gibt Bisimulation ρ zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mit

$d_1 \; \rho \; d_2$ (wir sagen: d_1 ist *bisimilar* zu d_2).

Beachte: die leere Relation ist immer Bisimulation!

Theorem 3.2.
Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.
Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C:
$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$.

T3.2

Intuitiv: $\mathcal{ALC}$ kann nicht zwischen d_1 und d_2 "unterscheiden".

Ausdrucksstärke

Wir interessieren uns für Eigenschaften von Element d in Interpretation $\mathcal{I}$:

- d hat einen r-Nachfolger;
- es gibt einen von d ausgehenden endlichen r-Pfad, dessen letztes Element Instanz von C ist;
- jedes Element von $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist r-Nachfolger von d.

Frage: ist Eigenschaft *ausdrückbar* in $\mathcal{ALC}$ (durch Konzept beschreibbar)?

Eigenschaft kann auch in logischem Formalismus gegeben sein, z.B.:

- $\exists r^-.A$
- $\exists y.(r(y, x) \wedge A(y))$

Ausdrückbarkeit: gibt es äquivalentes $\mathcal{ALC}$-Konzept?

Anwendungen von Bisimulation I

Beschränkungen der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$ beweisen.

Das ist schwierig mit syntaktischen Argumenten,

Bisimulation erlaubt semantisches Argument!

Theorem 3.3.
In $\mathcal{ALC}$ sind nicht ausdrückbar:

- das $\mathcal{ALCI}$-Konzept $\exists r^-.\top$;
- die $\mathcal{ALCQ}$-Konzepte
  - $(\leqslant n\ r\ \top)$ für alle $n > 0$ und
  - $(\geqslant n\ r\ \top)$, für alle $n > 1$.

T3.3

Anwendungen von Bisimulation II

Interpretation ist *Baum* gdw. $(\Delta^{\mathcal{I}}, \bigcup_{r \in \mathsf{N_R}} r^{\mathcal{I}})$ Baum (endl. oder unendl.)

$\mathcal{ALC}$ hat die *Baummodelleigenschaft*:

Theorem 3.4.
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist,
dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Baummodell $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$ Baum, Wurzel in $C^{\mathcal{I}}$

T3.4

Grundlage für Algorithmen, erlaubt Aussagen über Ausdrucksstärke

Beweis der Baummodelleigenschaft mittels fundamentaler Modellkonstruktion:

Unravelling.

Anwendungen von Bisimulation II

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

d-Pfad in $\mathcal{I}$: Sequenz $d_0 d_1 \cdots d_{n-1}$, $n \geq 1$, mit

- $d_0 = d$
- für alle $i < n$: es gibt $r \in \mathsf{N_R}$ mit $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$

Wir setzen $\mathsf{end}(d_0 \cdots d_{n-1}) = d_{n-1}$

T3.6

Definition 3.5. (Unravelling)
Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{J}} &= \text{Menge aller } d\text{-Pfade in } \mathcal{I} \\
A^{\mathcal{J}} &= \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \mathsf{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\} \\
r^{\mathcal{J}} &= \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid \exists e : p' = p \cdot e \text{ und } (\mathsf{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}
\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathsf{N_C}$ und $r \in \mathsf{N_R}$.

T3.6 cont

Anwendungen von Bisimulation II

Sei $\mathcal{J}$ Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d.

Lemma 3.6.
Für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt: T3.7
$\mathsf{end}(p) \in C^{\mathcal{I}}$ gdw $p \in C^{\mathcal{J}}$.

Es folgt Theorem 3.4.

Theorem 3.4.
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Baummodell $\mathcal{I}$.

T3.8

Baummodelleigenschaft gilt nicht in FO.

Bisimulation

Entsprechen Bisimulationen $genau$ der Ausdrucksstärke von $\boldsymbol{\mathcal{ALC}}$?

Nein! Gegenrichtung von Theorem 3.2 gilt nicht:

Es gibt Interpretationen $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ und $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{\mathcal{I}}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{J}}$ so dass
$\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$ gdw. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ für all $\boldsymbol{\mathcal{ALC}}$-Konzepte $\boldsymbol{C}$, aber $(\boldsymbol{\mathcal{I}}, \boldsymbol{d}) \not\sim (\boldsymbol{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x})$.

T3.9

Sie gilt allerdings für verschiedene Modellklassen, z.B.:

- die Klasse aller endlichen Modelle;
- die Klasse aller Modelle mit endlicher Verzweigungszahl;
- etc.

Derartige Klassen nennt man Henessy-Milner Klassen.

Erweiterungen von ALC

Für $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCQ}$ und $\mathcal{ALCQI}$ gibt es ebenfalls Bisimulationsbegriffe.

Zusätzliche Bedingungen für $\mathcal{ALCI}$:

- $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_1}$, für alle $r \in \mathsf{N_R}$

- $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ impliziert die Existenz eines $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_2}$, für alle $r \in \mathsf{N_R}$

Dann gilt Theorem 3.2 und man kann z.B. Baummodell-Eigenschaft für $\mathcal{ALCI}$ beweisen (Kanten im Baum können auch zur Wurzel gerichtet sein).

Auch $\mathcal{ALCQ}$ und $\mathcal{ALCQI}$ haben die Baummodelleigenschaft.

Ausdrucksstärke
und Modellkonstruktionen

Endliche Modelleigenschaft und Filtration

Überblick

- Endliche Modelleigenschaft: wenn C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$, dann haben C und $\mathcal{T}$ auch $endliches$ Modell

- Filtration wandelt Modell von Konzeptes und TBox in endliches Modell

- Zentrale Idee: Identifikation ununterscheidbarer Elemente (Im Sinne von: erfüllen dieselben Konzepte)

Größe von Konzepten und TBoxen

Definition 3.9.
Größe $|C|$ eines $\mathcal{ALC}$-Konzeptes C ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \\ |\neg C| &= |C| + 1 \\ |C \sqcap D| &= |C \sqcup D| = |C| + |D| + 1 \\ |\exists r.C| &= |\forall r.C| = |C| + 3 \end{aligned}$$

Größe $|\mathcal{T}|$ einer (generellen oder azyklischen) TBox $\mathcal{T}$ ist

$$\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1 + \sum_{A \equiv C \in \mathcal{T}} |C| + 2$$

Intuitiv: Anzahl Symbole in C bzw. $\mathcal{T}$.

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

$\mathcal{ALC}$ hat *endliche Modelleigenschaft*:

Theorem 3.10.

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames endliches Modell.

Gilt nicht in der Logik erster Stufe!

$\mathcal{ALC}$ hat sogar *beschränkte Modelleigenschaft*:

Theorem 3.11.

Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\mathbf{2}^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Typ

Im folgenden sei C $\mathcal{ALC}$-Konzept und $\mathcal{T}$ TBox, so dass C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$.

Wir definieren den Begriffs eines "Typs":

- ist Menge von Konzepten;
- beschreibt einen Punkt $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ in einer Interpretation $\mathcal{I}$;
- um Endlichkeit zu erreichen:

  Einschränkung auf Unterkonzepte von C und $\mathcal{T}$

Zentral für viele Techniken im Bereich Beschreibungslogik

Typ

Definition 3.12. (Teilkonzepte)

- $\mathsf{sub}(C)$ ist Menge der Teilkonzepte von C, einschliesslich C.
- $\mathsf{sub}(\mathcal{T}) = \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \mathsf{sub}(C) \cup \mathsf{sub}(D)$.
- $\mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) := \mathsf{sub}(C) \cup \mathsf{sub}(\mathcal{T})$.

T3.10

Lemma 3.13.
$|\mathsf{sub}(C, \mathcal{T})| \leq |C| + |\mathcal{T}|$.

Typ

Definition 3.14. (Typ von d)
Sei $\mathcal{I}$ Interpretation, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. *Typ* $t_{\mathcal{I}}(d)$ von d in $\mathcal{I}$ bzgl. ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}.$$

T3.11

Lemma 3.15.
Für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt $|\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}| \leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Filtration: Idee

- Gegeben Interpretation $\mathcal{I}$, identifiziere alle Elemente gleichen Typs
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur $\mathbf{2}^{|C|+|\mathcal{T}|}$ viele Typen
- Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch das Resultat

Filtration

Definition 3.16. (Filtration)
Sei $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$. Definiere Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Delta^{\mathcal{I}}$:

$$d \sim e \text{ gdw. } t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e).$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzgl. $\sim$ mit $[d]$.

Die *Filtration* von $\mathcal{I}$ bzgl. C und $\mathcal{T}$ ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$: T3.12

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \\
A^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\} \text{ für alle } A \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \\
r^{\mathcal{J}} &= \{([d], [e] \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\} \text{ für alle } r \in \mathsf{N_R}
\end{aligned}$$

Beachte: $A^{\mathcal{J}}$ is wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit).

Theorem 3.17.
Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch $\mathcal{J}$. T3.13

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

Theorem 3.11 folgt nun unmittelbar aus Theorem 3.17 und Lemma 3.15.

Theorem 3.11.
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist,
dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\mathbf{2}^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Ähnliche Resultate lassen sich für $\mathcal{ALCI}$ und $\mathcal{ALCQ}$ beweisen.
(mit derselben Schranke)

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft.

Theorem 3.18.
$\mathcal{ALCQI}$ hat nicht die endliche Modelleigenschaft.

Beweis:

A hat nur unendliche Modelle bzgl. folgender TBox:

$$\top \sqsubseteq \exists r.\neg A$$
$$\top \sqsubseteq (\leqslant 1\ r^{-}\ \top)$$

T3.14

Filtration für $\mathcal{ALCQI}$ also nicht anwendbar.