Prof. Carsten Lutz/Dr. Stefan Göller/ Dr. Thomas Schneider SS 2011

Theoretische Informatik 2

Ungewertete Aufgaben, Blatt 4

Besprechung: In Ihrer Übung in KW 22

---

1. Man gebe für folgende Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ jeweils **LOOP**-Programme an, die f berechnen:

a) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$.

b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \text{mult}(x, y)$.

c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \max(x, y)$.

d) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$.

2. Wenden Sie auf die folgenden primitiv-rekursiven Funktionen das Verfahren aus der Vorlesung an, um daraus ein äquivalentes **LOOP**-Programm zu konstruieren:

a) Die Additionsfunktion $\mathsf{add} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entstehe aus primitiver Rekursion der Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, wobei
   - $g(x) = \pi_1^{(1)}(x)$ und
   - $h(x, y, z) = s(\pi_2^{(3)}(x, y, z))$

b) Die Multiplikationsfunktion $\mathsf{mult} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ entstehe aus primitiver Rekursion der Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, wobei
   - $g(x) = \mathsf{null}^{(1)}(x)$ und
   - $h(x, y, z) = \mathsf{add}(\pi_1^{(3)}(x, y, z), \pi_2^{(3)}(x, y, z))$

3. Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist folgendermaßen definiert: $A(0, y) = y + 1$, $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$ und $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ eine Funktion $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an mit $f_i(n) = A(i, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Machen Sie sich das Wachstum für $i = 4$ klar.

4. Verwenden Sie beschränkte Minimalisierung, um sich primitive Rekursivität folgender Funktion klar zu machen: $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(n) = p_n$, wobei p_n die n-te Primzahl ist, d.h. $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$, und so weiter.

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass es für alle $n \geq 1$ eine Primzahl p gibt mit $n < p \leq n! + 1$.